

517
A-28
A-28

А. А. АДАМОВ

1-го Петроградского Политехнического Института

СБОРНИК ЗАДАЧ

ПО

ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА — 1922

№

Берегите книгу

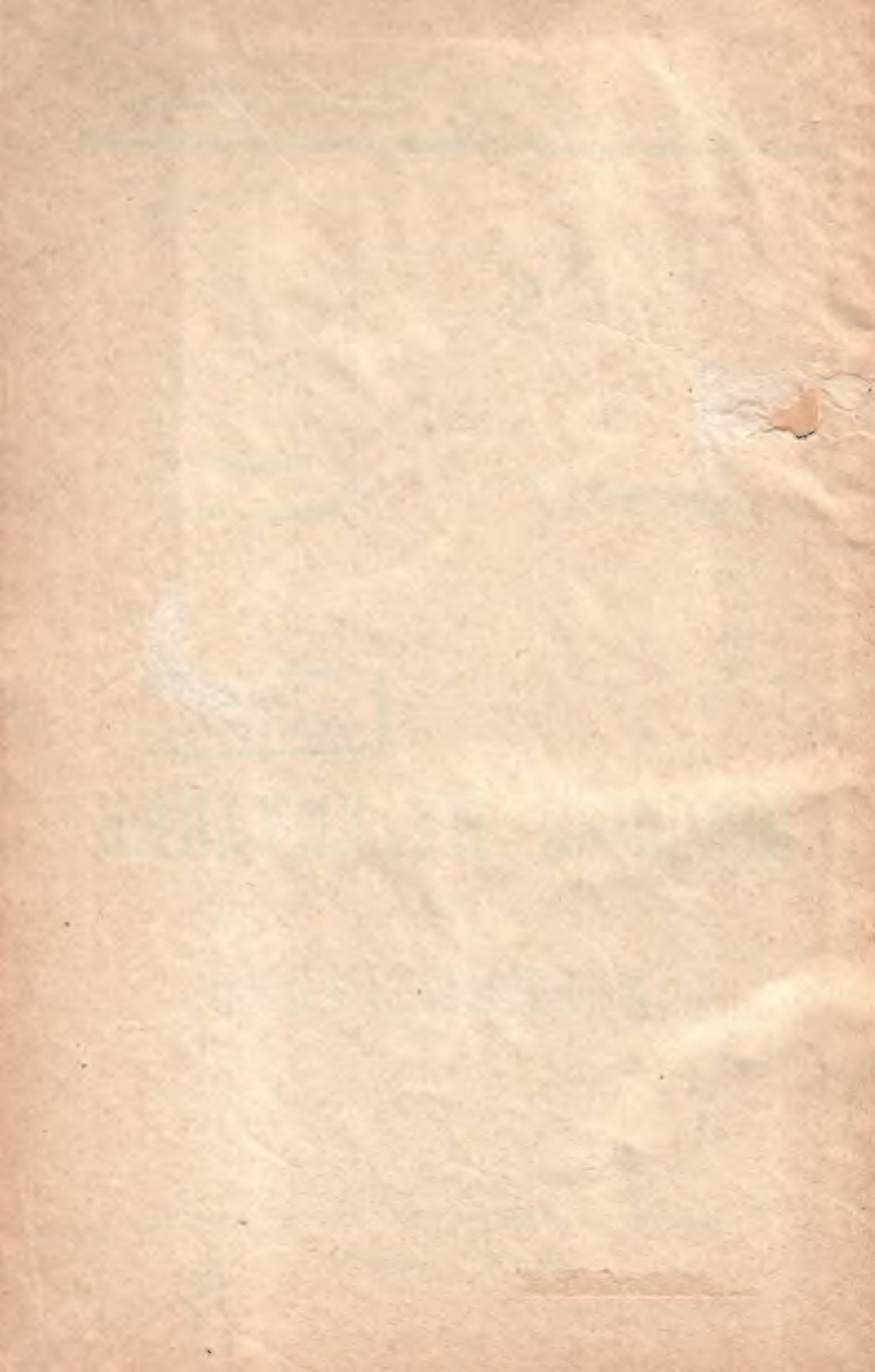
Не перегибайте книгу
во время чтения

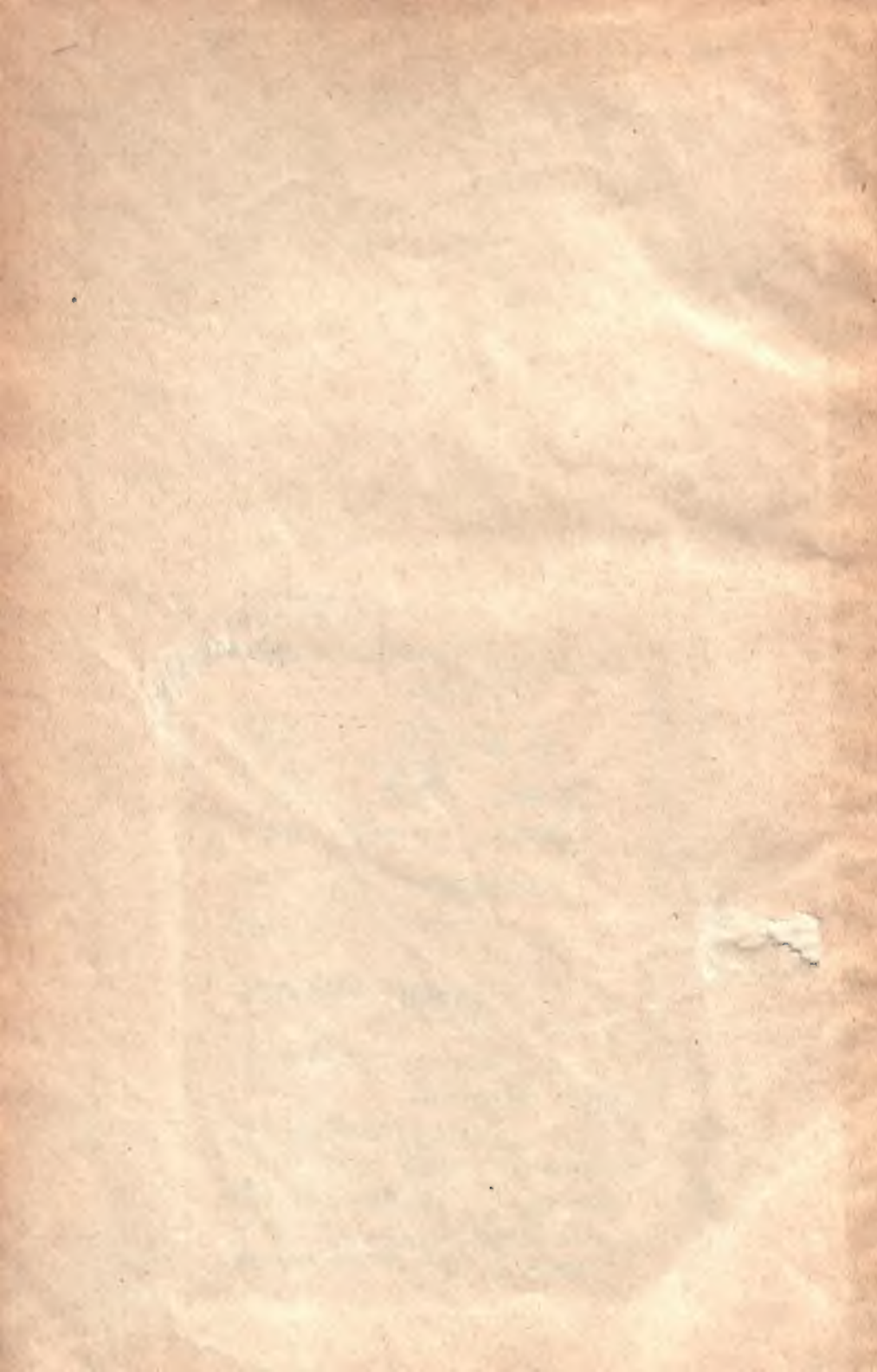
Не загибайте углов

Не делайте надписей на книге

Не смачивайте пальцев слю-
ною, перелистывая книгу

Завертывайте книгу в бумагу.





А. А. АДАШОВ

ПРОФЕССОР 1-го ПЕТРОГРАДСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СБОРНИК ЗАДАЧ

ПО

ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

проверено
1966 г.

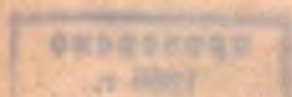
✓

257

~~проверено 1936~~

АКАДЕМИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА
— И. П. К. —
Иркутск, 1919 г.





Типография Морского Комиссариата, в Главном Адмиралтействе.

ПРЕДИСЛОВИЕ

к первому изданию.

Настоящий сборник задач содержит упражнения по тем отделам Высшей Математики, которые входят в курс лекций, читаемых мною в I-м Петроградском Политехническом Институте, именно: 1) Высшая Алгебра, 2) Интегрирование функций, 3) Геометрические приложения дифференциального исчисления, 4) Геометрические приложения интегрального исчисления, 5) Интегрирование дифференциальных уравнений, 6) Определенные интегралы, 7) Ряды. Во второй части сборника приведены ответы на предложенные задачи, и во многих случаях, для целой группы однородных задач, даны общие указания на способ решения.

А. Адамов.

Петроград, 6 мая 1911 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

ко второму изданию.

Второе издание отличается от первого лишь исправлением замеченных опечаток.

А. Адамов.

Петроград, 29 августа 1922 г.

ОТДЕЛ I.

Высшая алгебра.

1—2. Обозначая через C_n^m число сочетаний из n элементов по m , доказать:

$$1. 1 - C_{4k}^2 + C_{4k}^4 - \dots + \frac{1}{2} (-1)^k C_{4k}^{2k} = (-1)^k \cdot 2^{2k-1}.$$

$$2. C_{4k+2}^1 - C_{4k+2}^3 + C_{4k+2}^5 - \dots + \frac{1}{2} (-1)^k C_{4k+2}^{2k+1} = (-1)^k 2^{2k}.$$

3. Найти суммы:

$$P_{n-1} = 1 + a \cos b + a^2 \cos 2b + \dots + a^{n-1} \cos (n-1)b.$$

$$Q_{n-1} = a \sin b + a^2 \sin 2b + \dots + a^{n-1} \sin (n-1)b.$$

4. Доказать:

$$\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \sin \frac{3\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

5—8. Разложить на вещественные множители 2-ой степени функции:

$$5. x^4 + x^3 + 1.$$

$$6. x^4 - x^3 + 1.$$

$$7. x^6 + x^5 + 1.$$

$$8. x^6 - x^5 + 1.$$

9—11. Найти корни из комплексных чисел:

$$9. \sqrt{-5+12i}.$$

$$10. \sqrt[3]{i}$$

$$11. \sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

12. Найти целую функцию степени не выше 3-ей, которая при делении на $x+2$, $x+1$, $x-1$, $x-2$ дает остатки, равные 1.

13. Найти целую функцию степени не выше 4-ой, которая при делении на $x+2$, $x+1$, $x-1$, $x-2$ дает остаток $=1$ и при делении на $x-3$ дает остаток 0 .

14. Найти целую функцию степени не выше 3-ей, которая при делении на $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$ дает соответственно остатки $4, 3, 2, 1$.

15. Найти целую функцию степени не выше 4-ой, которая при делении на $(x-1)^3$ дает остаток 2 и при делении на $(x+1)^3$ дает остаток 1 .

16—38. Разложить на простейшие дроби:

$$16. \frac{3x^3 + 3x + 1}{2x^5 + 3x^2 + x}.$$

$$17. \frac{4x^2 + 2x + 1}{x^2(x+1)^2}.$$

$$18. \frac{x^2 + 2x - 5}{x^5 - x^3 - 4x + 4}.$$

$$19. \frac{x^3 - 2x + 6}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}.$$

$$20. \frac{x^5 + x^3 - 2x + 1}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

$$21. \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 7}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18}.$$

$$22. \frac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2}.$$

$$23. \frac{x^2 + 6x + 7}{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}.$$

$$24. \frac{x - 2}{(x-1)^2(x^2 - 4x + 5)}.$$

$$25. \frac{2x^3 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)^3(x^2 + 1)}.$$

$$26. \frac{x^2 + x + 2}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 3)}.$$

$$27. \frac{1}{(x^2 + 1)(x^3 - x + 1)}.$$

$$28. \frac{2x - 3}{(x+1)^2(x^3 + x + 1)}.$$

$$29. \frac{3x^2 + x - 2}{(x-1)^3(x^2 + 1)}.$$

$$30. \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)^2(x^3 - x + 1)^2}.$$

$$31. \frac{2x^3 - x + 1}{(x-1)^3(x^2 + 1)^2}.$$

$$32. \frac{x^6 + 2x^5 - x^3 + 1}{(x-1)(x^2 - x + 1)^3}.$$

$$33. \frac{1}{1+x^4}.$$

$$34. \frac{1-x^2}{x^4 + 3x^2 + 4}.$$

$$35. \frac{1}{x^4 - x^2 + 1}.$$

$$36. \frac{x^2}{x^4 - 3x^2 + 9}.$$

$$37. \frac{1}{x^4 - 6x^2 + 1}.$$

$$38. \frac{1}{x^6 + 1}.$$

39—41. Следующие уравнения с кратными корнями привести к системе уравнений с простыми корнями:

$$39. x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 20x + 8 = 0.$$

$$40. x^7 - 2x^6 + 3x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$$41. x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 0.$$

42—57. Найти рациональные корни следующих уравнений:

$$42. x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0. \quad 43. x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0.$$

$$44. x^4 - x^3 - 11x^2 - x - 12 = 0.$$

$$45. x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0.$$

$$46. x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 11x + 30 = 0.$$

$$47. x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 31x^2 - 34x - 24 = 0$$

$$48. 2x^3 - x^2 - 25x - 12 = 0. \quad 49. 20x^4 + 3x^3 - 18x^2 + 3x - 2 = 0.$$

$$50. 4x^4 - 16x^3 + 5x^2 + 19x + 6 = 0.$$

$$51. 8x^5 - 20x^4 - 30x^3 + 65x^2 - 35x - 6 = 0.$$

$$52. 6x^5 + 11x^4 + 5x^3 + 5x^2 - x - 6 = 0.$$

$$53. 25x^4 + 110x^3 + 162x^2 + 38x - 15 = 0.$$

$$54. 10x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 13x - 3 = 0.$$

$$55. 6x^4 - x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0.$$

$$56. 6x^4 + 13x^3 + 12x^2 + 13x - 6 = 0.$$

$$57. x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 21x^2 - 10x - 24 = 0.$$

58—74. Отделить по способу Штурма корни следующих уравнений:

$$58. x^5 - 5x + 10 = 0. \quad 59. x^5 + 10x - 12 = 0.$$

$$60. x^6 - 7x + 2 = 0. \quad 61. x^6 + 3x - 10 = 0.$$

$$62. x^6 + 6x + 8 = 0. \quad 63. 2x^3 - 11x^2 - 27x - 16 = 0.$$

$$64. 2x^3 - 17x^2 + x + 30 = 0.$$

$$65. x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 8x - 1 = 0.$$

$$66. x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 18 = 0.$$

$$67. x^5 - 5x^3 + 10x - 6 = 0.$$

$$68. x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 12 = 0. \quad 69. x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 +$$

$$+ 12 = 0. \quad 70. x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 20x + 8 = 0.$$

$$71. x^4 - 4x^3 + 8x - 6 = 0.$$

$$72. x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 12x + 10 = 0.$$

$$73. x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 6x^3 - 9x^2 - 24x - 6 = 0.$$

$$74. x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 3x^2 + 12x + 22 = 0.$$

75—78. Исключить иррациональность из знаменателей дробей:

$$75. \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \quad 76. \frac{2\sqrt{6} - 3}{\sqrt{6} - 3\sqrt{6} + 2} \quad 77. \frac{2\sqrt{5} - 1}{\sqrt{25} - 4\sqrt{5} + 1}$$

$$78. \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}.$$

79—82. Вычислить следующие симметрические функции от корней x_1, x_2, x_3 кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$:

$$79. \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}, \quad 80. \left(\frac{x_1}{x_2 x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3 x_1}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{x_1 x_2}\right)^2.$$

$$81. \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2}.$$

$$82. \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1} + \frac{x_3^2 + x_1^2}{x_2}.$$

83—86. Вычислить следующие симметрические функции от корней данных уравнений.

$$83. \sum_{x^4 + 1}^x \text{ от корней ур-ня } x^4 + 1 = 0.$$

$$84. \sum_{x^3 - x - 1} \frac{x-1}{2x+3} \text{ от корней ур-ня } x^3 - x - 1 = 0.$$

$$85. \sum_{x^4 - x - 1} \frac{1}{x^2 - 1} \text{ от корней ур-ня } x^4 - x - 1 = 0.$$

$$86. \sum_{x^4 + x - 1} \frac{1}{x+2} \text{ от корней ур-ня } x^4 + x - 1 = 0.$$

87—89. Вычислить (по формулам Кардана) корни следующих кубических уравнений:

$$87. x^3 - 6x^2 + 9x + 2 = 0. \quad 88. x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

$$89. 8x^3 + 12x^2 - 66x - 51 = 0.$$

90—97. Определить (по способу Феррари) корни следующих уравнений 4-ой степени:

$$90. x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 1 = 0.$$

$$91. x^4 + 4x^3 - 14x^2 - 4x + 1 = 0.$$

$$92. x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = 0.$$

93. $x^4 + 4x^3 + x^2 + 12x + 9 = 0.$

94. $x^4 - 2x^3 + 4x + 2 = 0.$

95. $x^4 + 3x^2 + 4 = 0.$

96. $x^4 - 3x^2 - 9 = 0.$

97. $x^4 - 6x^2 - 1 = 0.$

98 100. Решить по способу Граффе следующие уравнения:

98. $x^3 - x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{105} = 0.$ 99. $x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{119}{360}x - \frac{149}{6480} = 0.$

100. $x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{27}{40}x^2 - \frac{57}{560}x + \frac{53}{22400} = 0.$

101 102. Решить уравнения:

101. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ a^3 & b^3 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$

102. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ a^4 & b^4 & x^4 \end{vmatrix} = 0.$

103. При каких значениях k система:

$$x + 2y = 3, \quad 2x + 5y = k, \quad x - 3y = -2$$

будет совместной?

104. При каких значениях t система:

$$2x - 3y - 2z = tx, \quad 4x + y + 4z = ty, \quad 3x - 2y + 2z = tz$$

допускает решения для x, y, z иные, чем $x = y = z = 0$?

ОТДЕЛ II.

Интегрирование функций.

1. $\int \frac{x^4 dx}{1 - x^2}$ ✓

2. $\int \frac{x^4 + 1}{x^2 - x + 1} dx.$

3. $\int \frac{x^3 + x - 1}{x^3(x - 1)^2} dx.$

4. $\int \frac{1 + x^4}{x^2(1 - x^4)} dx.$

5. $\int \frac{1 - 2x^3}{x^2(1 + x^4)} dx.$

6. $\int \frac{dx}{3x^4 - 7x^2 + 4x}.$

7. $\int \frac{dx}{1 + x^5}.$

8. $\int \frac{x dx}{1 + x^2}.$

9. $\int \frac{dx}{x^4 - 6x^2 + 1}.$

10. $\int \frac{dx}{x^4 + 6x^2 - 11x^2 + 6x}.$

$$11. \int \frac{x^3 + 6x + 7}{x^3 + 5x^2 + 9x - 5} dx.$$

$$12. \int \frac{(2x+3)dx}{x^2 + x^2 - 2}.$$

$$13. \int \frac{x^2 dx}{x^4 + 2x^2 - 3}.$$

$$14. \int \frac{dx}{1+x^4}.$$

$$15. \int \frac{1-x^2}{x^4 + 3x^2 + 4} dx.$$

$$16. \int \frac{2x^2 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)^4 (x^2 + 1)} dx.$$

$$17. \int \frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2} dx.$$

$$18. \int \frac{4x^2 + 2x + 1}{x^2(x+1)^2} dx.$$

$$19. \int \frac{x^2 - 2x^2 - 3x + 7}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18} dx.$$

$$20. \int \frac{x^2 dx}{x^4 - 3x^2 + 9}.$$

$$21. \int \frac{x-2}{(x-1)^2(x^2-4x+5)} dx.$$

$$22. \int \frac{x^3 + x + 2}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

$$23. \int \frac{x^3 + 3x - 2}{(x-1)^2(x^2 - x + 1)^2} dx.$$

$$24. \int \frac{dx}{1+x^6}.$$

$$25. \int \frac{dx}{1-x^6}.$$

$$26. \int \frac{x dx}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

$$27. \int \frac{x^2 - 1}{(2x-1)^3} dx.$$

$$28. \int \frac{x^3 - 1}{(x+2)^3} dx.$$

$$29. \int \frac{dx}{(x+1)^4(x-2)^4}.$$

$$30. \int \frac{dx}{(2x+3)^2(3x-2)^4}.$$

$$31. \int \frac{dx}{x^6(x-1)^2}.$$

$$32. \int \frac{dx}{(x^2 - 3x + 2)^4}.$$

$$33. \int \frac{x^3 dx}{1+x^4}.$$

$$34. \int \frac{2x^3 - x^5}{1+x^6} dx.$$

$$35. \int \frac{2x^3 - 1}{x(x^6 + 1)} dx.$$

$$36. \int \frac{dx}{x(1-x^4)^2}.$$

$$37. \int \frac{dx}{x^3(x^3 + 1)^2}.$$

$$38. \int \frac{x(1-2x^2)}{1-x^4} dx.$$

$$39. \int \frac{x^5 dx}{x^{12} + 1}.$$

$$40. \int \frac{x^5 dx}{x^8 - 1}.$$

$$41. \int \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}.$$

$$42. \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}.$$

$$43. \int \frac{x dx}{x^6 - 1}.$$

$$44. \int \frac{dx}{x(1+x^6)}.$$

45. $\int \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1}.$

47. $\int \frac{dx}{x^3 (x^2 - 2)}.$

49. $\int \frac{dx}{x^3 (x^4 + 1)}.$

51. $\int \frac{dx}{x^5 (1 + x^2)}.$

53. $\int \frac{x^{11} dx}{(x^6 + 1)^4}.$

55. $\int \frac{x^2 dx}{x^6 - x^3 + 1}.$

57. $\int \frac{x^2 dx}{(x^3 - 3)^4}.$

59. $\int \frac{x^2 (1 - x^2)}{(1 - x^2)^4} dx.$

61. $\int \frac{x^4 dx}{(1 + x^2)^3}.$

63. $\int \frac{x^3 dx}{(x^3 + 1)^2}.$

65. $\int \frac{x^4 dx}{(x^3 + 1)^4}.$

67. $\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$

69. $\int \frac{(x-1) dx}{x^2 + 1}.$

71. $\int \frac{(x^4 + 1) dx}{x^6 - 5x^4 - 5x^2 + 1}.$

73. $\int \frac{(x^4 - 1) dx}{x^6 - 1}.$

75. $\int \frac{(x^3 + 1) dx}{x^4 + 3x^3 - 3x - 1}.$

77. $\int \frac{(x^3 - 1) dx}{x^4 - 1}.$

46. $\int \frac{x^3 dx}{x^6 - 1}.$

48. $\int \frac{x^3 dx}{x^4 - 3x^2 + 2}.$

50. $\int \frac{dx}{x^4 (x^5 + 1)}.$

52. $\int \frac{x^7 dx}{(1 + x^4)^2}.$

54. $\int \frac{dx}{x_0 (1 + x^4)^3}.$

56. $\int \frac{(x+1) dx}{x^4 - x^2 + 1}.$

58. $\int \frac{x^4 dx}{(x^3 + 2)^3}.$

60. $\int \frac{x^{10} dx}{(1 + x^3)^4}.$

62. $\int \frac{x^{12} dx}{(x^6 + 1)^4}.$

64. $\int \frac{x^4 dx}{(x^4 - 1)^2}.$

66. $\int \frac{(x^2 - 1) dx}{(2x^2 - 1)^2}.$

68. $\int \frac{(x^2 - 1) dx}{x^3 + x^2 + 1}.$

70. $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^4 + 3x^2 + 1}.$

72. $\int \frac{(x^2 - 1) dx}{x^4 - x^2 + 1}.$

74. $\int \frac{(x^4 + 1) dx}{x^6 + 1}.$

76. $\int \frac{(x+1) dx}{x^3 - 1}.$

78. $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^4 - 1}.$

$$79. \int \frac{x(x-1) dx}{x^5 - 1}.$$

$$81. \int \frac{(x^3 + 1) dx}{x^4 + 5x^2 + 1}.$$

$$83. \int \frac{2x + 1}{(x + 1)^3 x^{3/2}} dx.$$

$$85. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

$$87. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x} - 2}.$$

$$89. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}.$$

$$91. \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

$$93. \int \frac{dx}{\sqrt{x^3 (x-1)^5}}.$$

$$95. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x(x-1)}}.$$

$$97. \int \frac{x + \sqrt{x+1}}{x-1} dx.$$

$$99. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

$$101. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$$

$$103. \int \frac{dx}{\sqrt{6-x-x^3}}.$$

$$105. \int \frac{dr}{\sqrt{x^3 + 3}}.$$

$$107. \int \sqrt{x^2 + a} dx.$$

$$80. \int \frac{(x^2 - 1) dx}{x^4 + 5x^2 + 1}.$$

$$82. \int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^3 x^2 - x - 1}.$$

$$84. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

$$86. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$88. \int \frac{dx}{r \sqrt{x^2 + x}}$$

$$90. \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}.$$

$$92. \int \sqrt{\frac{2-x}{1-x}} dx.$$

$$94. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 (x+1)^3}}.$$

$$96. \int \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{3/2} dx.$$

$$98. \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} \sqrt{x+2}}.$$

$$100. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-a^2 + a \sqrt{1-x^2}}}.$$

$$102. \int x(3x^2 - 2a^2) \sqrt{x^2 - a^2} dx.$$

$$104. \int \frac{dx}{\sqrt{4+6x-9x^2}}.$$

$$106. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 7x - 1}}.$$

$$108. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$109. \int \frac{x^3 - x + 1}{(x^2 - 2x + 2)} dx.$$

$$111. \int \frac{1 + 4x - 5x^3 - 6x^5}{(1 - x - x^2)} dx.$$

$$113. \int (x+1) \sqrt[3]{2-x-x^2} dx.$$

$$115. \int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$117. \int \frac{dx}{(x+2) \sqrt{x^2+x-1}}$$

$$119. \int \frac{xdx}{(x^2-4) \sqrt{x^2-x-1}}.$$

$$121. \int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

$$123. \int \frac{(x-1) dx}{(x^2+1) \sqrt{3-x^2}}$$

$$125. \int \frac{(x-1) dx}{(x^2+1)^{5/2}}.$$

$$127. \int \frac{(1-x) dx}{(1-x-x^2)}.$$

$$129. \int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{5/2}}.$$

$$131. \int \frac{dx}{(x^4-1) \sqrt{x^2-1}}$$

$$133. \int \frac{dx}{(x^2+1)^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$135. \int \frac{(2x-1) dx}{(x^2-x+2) \sqrt{2x^2-2x+1}}.$$

$$137. \int \frac{(x-3) dx}{(2x^2+6x+1) \sqrt{3x^2+8x+2}}$$

$$139. \int \frac{(2x-3) dx}{2x^2-3x+2 \sqrt{x^2-x-1}}$$

$$110. \int \frac{3x^3+3x^5+8x-4}{(x^2-2x-5)} dx.$$

$$112. \int \sqrt{2x^2-x-3} dx.$$

$$114. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$116. \int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$118. \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{x^2+3x+2}}$$

$$120. \int \frac{dx}{(x^3-x) \sqrt{x^2-x}}$$

$$122. \int \frac{dx}{(1-x^2) \sqrt{1-x^2}}$$

$$124. \int \frac{dx}{(x^2+2)^2 \sqrt{1-x}}$$

$$126. \int \frac{(2x-1) dx}{(x^2-x+1)^2}.$$

$$128. \int \frac{(x-1) dx}{(x^2+2x-1)^2}.$$

$$130. \int \frac{(x-1) dx}{x^2-x+1^2}.$$

$$132. \int \frac{xdx}{(x^2-3x+2) \sqrt{x^2-x+1}}$$

$$134. \int \frac{dx}{x^2+x-3 \sqrt{x^2-x+2}}$$

$$136. \int \frac{x^2-2) dx}{(x^4-1) \sqrt{x^2-x+2}}$$

$$138. \int \frac{(3x+2) dx}{4x^2+5x+4) \sqrt{3x^2-4x-3}}$$

$$140. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}$$

$$141. \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1+x^3}}.$$

$$143. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

$$145. \int \frac{dx}{(x^4-1) \sqrt[4]{x^4+2}}.$$

$$147. \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$149. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^3-1}}.$$

$$151. \int (3-2x^3)^{2/3} dx.$$

$$153. \int x(1-x^3)^{-1} dx.$$

$$155. \int x^3(1+x^{1/2})^{1/2} dx.$$

$$157. \int (1-x+x^2)^{3/2} dx.$$

$$159. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^3+x^4}}.$$

$$161. \int \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}.$$

$$163. \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} dx.$$

$$165. \int \frac{(x^6-1) x dx}{(x^2+1)^2 (x^4-x^2+1)^2}.$$

$$167. \int \frac{(x^2-1) dx}{x \sqrt{x(x^2-x+1)}}.$$

$$169. \int \frac{3x^2+5x^6}{\sqrt{1+x^4}} dx.$$

$$171. \int e^{2x} x^2 dx.$$

$$142. \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^6}}.$$

$$144. \int \frac{dx}{(x^3+1) \sqrt[3]{1-x^3}}.$$

$$146. \int \frac{dx}{(x^4+5) \sqrt[4]{x^4+1}}.$$

$$148. \int \frac{dx}{x^5 \sqrt[5]{1+x^5}}.$$

$$150. \int \frac{dx}{x^6 \sqrt[6]{2x^6+1}}.$$

$$152. \int x^2 \sqrt[4]{1+x^4} dx.$$

$$154. \int x^3 \sqrt[4]{1+x^4} dx.$$

$$156. \int (1+x^6)^{-7/6} dx.$$

$$158. \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2+x^4}}.$$

$$160. \int (x + \sqrt{1+x^3})^{1/3} \cdot \frac{dx}{1-x^2}.$$

$$162. \int \frac{(x^2-1) dx}{(x^2+1) \sqrt{x^4-x^2+1}}.$$

$$164. \int \frac{x^3+1}{x^4-1} \cdot \frac{x dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

$$166. \int \frac{x^3-1}{x^3+1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4-x^2+1}}.$$

$$168. \int \frac{(x^2+1) dx}{x \sqrt{x(x^2+x-1)}}.$$

$$170. \int \frac{3x^4+1}{\sqrt{1+x^4}} dx.$$

$$172. \int \frac{1}{\sqrt[3]{2^x}} (e^x-1) dx.$$

173. $\int e^{-x} \cos 3x \, dx.$
 175. $\int e^{-x} x^2 \cos 2x \, dx.$
 177. $\int (x^3 - x) \cos 3x \, dx.$
 179. $\int x \sin 2x \cos 4x \, dx.$
 181. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx.$
 183. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx.$
 185. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^5 x}.$
 187. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$
 189. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}.$
 191. $\int \sin^5 x \, dx.$
 193. $\int \cos^7 x \, dx.$
 195. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^5 x}.$
 197. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}.$
 199. $\int \frac{\sin^4 x \, dx}{\cos^2 x}.$
 201. $\int \sin^6 x \cos^5 x \, dx.$
 203. $\int \sin^6 x \cos^4 x \, dx.$
 205. $\int \sqrt{\sin^2 x \cos x} \, dx.$
 207. $\int \sqrt{\sin^6 x \cos x} \, dx.$
174. $\int \frac{\cos x - 3 \sin x}{\sqrt{3^x}} \, dx.$
 176. $\int e^{2x} x \sin^3 x \, dx.$
 178. $\int \sin x \sin 2x \cos 3x \, dx.$
 180. $\int \frac{dx}{2 - 3 \sin x + \cos x}.$
 182. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx.$
 184. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} \, dx.$
 186. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^5 x}.$
 188. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$
 190. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}.$
 192. $\int \sin^6 x \, dx.$
 194. $\int \cos^4 x \, dx.$
 196. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \, dx.$
 198. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}.$
 200. $\int \frac{\sin^6 x \, dx}{\cos^3 x}.$
 202. $\int \sin^3 x \cos^7 x \, dx.$
 204. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^4 x \cos x}}.$
 206. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x \cos^4 x}}.$
 208. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^4 x \cos^2 x}}.$

$$209. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^4 x \cos^5 x}};$$

$$210. \int \operatorname{tg}^5 x dx.$$

$$211. \int \cot^4 x dx$$

$$212. \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$$

$$213. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}.$$

$$214. \int \frac{dx}{2 + 3 \cos^2 x}.$$

$$215. \int \frac{dx}{(3 + \sin^2 x)^2}.$$

$$216. \int \frac{-1 + 4 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x}{\sin^4 x} dx.$$

$$217. \int \frac{dx}{2 - \operatorname{tg} x}.$$

$$218. \int \frac{dx}{1 + 2 \sin x}$$

$$219. \int \frac{\sin x dx}{(1 - 3 \cos x)^2}.$$

$$220. \int \frac{\sin^2 x dx}{(2 + \cos x)^2}.$$

$$221. \int \frac{dx}{(3 + \sin x)^2}.$$

$$222. \int \frac{\cos^2 x dx}{(2 + 3 \sin x)^2}.$$

$$223. \int \frac{dx}{(1 - 3 \sin x + \cos x)^2}.$$

$$224. \int \frac{2 \cos x - \sin x + 1}{(2 + \cos x)^3} dx.$$

$$225. \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$226. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + \cos^2 x}.$$

$$227. \int \frac{3 \sin x + 5 \cos x}{\sin x - 2 \cos^3 x} dx.$$

$$228. \int \frac{dx}{2 \cot x - 3 \sin x}.$$

$$229. \int \frac{dx}{\cos x - 2 \operatorname{tg} x}.$$

$$230. \int \frac{\sin x dx}{\sin x + 3 \cos x}.$$

$$231. \int \frac{\cos x dx}{(1 - e^2 \cos^2 x)^2}.$$

$$232. \int \frac{\cos x dx}{\sin 3x}.$$

$$233. \int \frac{\cos x dx}{(\cos 2x)^{3/2}}.$$

$$234. \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx.$$

$$235. \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x (\sin x + \cos x)} dx.$$

$$236. \int \frac{\sin x dx}{\sin x - \cos x}.$$

$$237. \int \frac{\sin x dx}{\cos x (1 - \sin x \cos x)}.$$

$$238. \int (a \cos^2 x + b \sin^2 x)^k \sin x \cos x dx.$$

$$239. \int \frac{dx}{\sin 4x}$$

$$240. \int \frac{\cos x dx}{\sin 4x}.$$

$$241. \int \frac{\cos^2 x dx}{\cos 4x}.$$

$$242. \int \frac{dx}{\sin x \sin 3x}.$$

$$243. \int \frac{dx}{\cos x \cos 3x}.$$

$$245. \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin 3x}} dx.$$

$$247. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}.$$

$$249. \int \frac{2+3\lg x+2\lg^2 x}{x\lg x(1+\lg x)} dx.$$

$$251. \int \frac{x \lg x dx}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

$$253. \int \frac{\log(x-2) dx}{(x+1)^2}.$$

$$255. \int \frac{x \log(x-1) dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$257. \int \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad 258. \int \log\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right) \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$259. \int \frac{\log \operatorname{tg} x dx}{\cos^4 x}.$$

$$261. \int \arcsin^2 x dx.$$

$$263. \int \frac{\arcsin x dx}{(1+x)^2}.$$

$$265. \int \frac{x \cdot \arcsin x dx}{(1-x^2)^2}.$$

$$267. \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$269. \int \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$$

$$271. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$$

$$273. \int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{(1+x)^2}.$$

$$275. \int \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$244. \int \frac{\sin x dx}{\cos 3x}.$$

$$246. \int \frac{dx}{2x+1}.$$

$$248. \int \sqrt{x} \lg^2 x dx.$$

$$250. \int \frac{\lg x \cdot dx}{(x^2+1)^{1/2}}.$$

$$252. \int \frac{\lg(x+2) dx}{\sqrt{x+1}}.$$

$$254. \int \frac{(x+1) \lg(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx.$$

$$256. \int \log(x+\sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$260. \int x^2 \arcsin x dx.$$

$$262. \int \frac{\arcsin x dx}{(1-x)^2}.$$

$$264. \int \frac{\arcsin x dx}{(1-x^2)^2}.$$

$$266. \int \frac{x \cdot \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$268. \int x \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$$

$$270. \int \arcsin \sqrt{x} dx.$$

$$272. \int x^2 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$274. \int \frac{x \operatorname{arctg} x dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$276. \int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

$$277. \int \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx}{(1+x^2)^2}.$$

$$279. \int \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx}{(1-x^2)^2}.$$

$$281. \int \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx}{(x^2-1)^2}.$$

$$283. \int e^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} \, dx.$$

$$285. \int \frac{dx}{x(\log x - 1)}.$$

$$287. \int \frac{\log \operatorname{tg} x \cdot dx}{\sin^2 x}.$$

$$289. \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \log \sin x \, dx.$$

$$291. \int \frac{\log \sin x \, dx}{\cos^4 x}.$$

$$293. \int \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} \, dx.$$

$$295. \int \frac{3 + 2x - \frac{1}{2}x^3 - x^3}{x^4} e^{-x} \, dx.$$

$$297. \int \frac{\log x - 1}{\log^2 x} \, dx.$$

$$299. \int \frac{2 + \log x}{\log^2 x} \cdot \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

$$301. \int \frac{1 + \sin^2 x}{\sqrt{\sin^2 x}} \, dx.$$

$$303. \int \frac{e^{-x^3}(1 + 2x^3)}{x^2} \, dx.$$

$$305. \int \frac{\log x \, dx}{\sqrt{1-x}}.$$

$$307. \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$$

$$309. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^5 x}.$$

$$278. \int \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{(1-x^2)^2}.$$

$$280. \int \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$$

$$282. \int e^{\cos 2x} \sin 2x \, dx.$$

$$284. \int \frac{2-3x}{x^3} e^{-\frac{2}{x}} \, dx$$

$$286. \int \frac{1 + \log x}{(x \log x)^2} \, dx.$$

$$288. \int \cos x \cdot \log \operatorname{tg} x \, dx.$$

$$290. \int \frac{\log \cos x \, dx}{\cos^4 x}.$$

$$292. \int \frac{e^{-x}(2x+1)}{x\sqrt{x}} \, dx.$$

$$294. \int \frac{e^x (\sin x - 3 \cos x)}{\sin^4 x} \, dx.$$

$$296. \int \frac{(2x^2 + x + 1)e^x}{(2x+1)^2} \, dx.$$

$$298. \int \frac{2x \log^2 x}{(1 + \log x)^2} \, dx.$$

$$300. \int \sin(e^x) [xe^x - e^{-x}] \, dx.$$

$$302. \int \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^4 x} \, dx.$$

$$304. \int \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \, dx.$$

$$306. \int \frac{x \log x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$308. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$310. \int \frac{dx}{2 + 3 \operatorname{sh}^2 x}.$$

311. $\int \operatorname{sh} 2x \cos 3x \, dx.$

312. $\int x \operatorname{sh} 2x \cos x \, dx.$

313. $\int x^2 \operatorname{ch} 3x \, dx.$

314. $\int x \cdot \operatorname{arctgh} x \, dx.$

315. $\int x \cdot \operatorname{arsinh} x \, dx.$

316. $\int \frac{\log \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx.$

317. $\int \operatorname{sh} x \cdot \log \operatorname{th} x \, dx.$

318. $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x \, dx}{(2 + \operatorname{ch} x)^2}.$

Принтегрировать полные дифференциалы:

$$319. \left[\sqrt{1-y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{y}{x^2+y^2} \right] dx + \\ + \left[\sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{y} \right] dy$$

$$320. \left[2\sqrt{\frac{y}{1-xy}} + \frac{y}{x^2 \cdot y^2} + e^x \sin 2y + \frac{1}{\sin x} \right] dx + \\ + \left[2\sqrt{\frac{y}{1-xy}} - \frac{x}{x^2 \cdot y^2} + 2e^x \cos 2y \right] dy.$$

$$321. \left[\sqrt{1-y^2} + \sqrt{\frac{1}{x^2-y^2}} + \sqrt{\frac{1}{y^2-x^2}} \right] dx + \\ + \left[\sqrt{\frac{xy}{1-y^2}} - \frac{y}{(x+\sqrt{x^2-y^2})\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{1}{y} \right] dy.$$

$$322. \left[\frac{1}{2\sqrt{xy}} + \frac{1}{x-2y} - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x(1-xy)}} - \frac{1}{x^2} \right] dx + \\ + \left[\frac{-\sqrt{x}}{2y\sqrt{y}} - \frac{2}{x-2y} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y(1-xy)}} + \frac{1}{(y^2+1)^2} \right] dy$$

$$323. \left[\frac{2x}{x^2-y^2} + 2x\sqrt{1+y} - \frac{y}{1+x^2y^2} + \lg x \right] dx + \\ + \left[\frac{2y}{x^2-y^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+y}} - \frac{x}{1-x^2y^2} + \frac{1}{y\sqrt{1+y^2}} \right] dy.$$

$$324. \left[\frac{x+1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2z^2-x^2}} \right] dx + \\ + \left[\frac{y+1}{y} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2z^2-x^2}} \right] dy + \\ + \left[\frac{z+1}{z} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x}{z\sqrt{y^2z^2-x^2}} \right] dz.$$

325. $\left[\frac{1}{x^2 - 3y - 4z} \sqrt{\frac{x + \frac{1}{2}z}{x^2 + xz + z^2}} + 1 \right] dx +$
 $\left[\frac{3}{x + 3y - 4z} \cdot \frac{\sqrt{z}}{y(1 + yz)} + \frac{1}{(y^2 - 1)^2} \right] dy$
 $+ \left[\frac{4}{x^2 - 3y - 4z} \sqrt{\frac{x - z}{x^2 + xz + z^2}} + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{z}(1 + yz)} - 1 \right] dz.$
326. $\left[\frac{yz}{1 + (xyz)^2} - \frac{2x}{x^2 + z^2} + 2x \right] dx - \left[\frac{xz}{1 + (xyz)^2} - \frac{1}{2\sqrt{yz}} - 1 \right] dy +$
 $+ \left[\frac{xy}{1 + (xyz)^2} - \frac{2z}{x^2 + z^2} - \frac{1}{2z\sqrt{z}} + 1 \right] dz.$
327. $\left[\frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x(1 + yz)}} - \frac{2z}{x^2 - z^2} + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \right] dx +$
 $+ \left[\frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y(1 + yz)}} - \frac{z}{(y - z)\sqrt{y^2 - z^2}} + \frac{y}{\cos^2 y} \right] dy +$
 $+ \left[\frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z(1 + yz)}} + \frac{2x}{x^2 - z^2} + \frac{y}{(y - z)\sqrt{y - z^2}} + \frac{1}{\log z} \right] dz.$
328. $\left[\frac{2x}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{z}{(x + z)\sqrt{x^2 - z^2}} + \frac{\log x}{x} \right] dx +$
 $+ \left[\frac{2y}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{z^2 - y^2}} + \frac{1}{y^2\sqrt{1 + y^2}} \right] dy$
 $+ \left[\frac{-2z}{x^2 + y^2 - z^2} - \frac{x}{(x + z)\sqrt{x^2 - z^2}} - \frac{y}{z\sqrt{z^2 - y^2}} + \frac{\cos z}{\sqrt{\sin z}} \right] dz.$

Найти функцию $u(x, y, z)$ по следующим условиям:

329. $du = \left(2xyz + \frac{1}{z} \right) dx + \left(x^2z - \frac{1}{z^2} \right) dy + \left(x^2y - \frac{x}{z^2} + \frac{2y}{z^3} \right) dz,$

$u(1, 1, 1) = 1.$

330. $du = (2xy + z^2 + yz) dx + (x^2 + 2yz - xz) dy + (y^2 + 2xz + xy) dz,$
 $u(0, 0, 0) = 0.$

ОТДЕЛ III.

Геометрические приложения дифференциального исчисления.

В задачах п. 1--30 введены для краткости следующие обозначения (в прямоугольной системе координат):

S_t — подкасательная; S_n — поднормаль;

T — длина касательной, N — длина нормали;

X_t , Y_t — отрезки, отсекаемые касательной на осях абсцисс и ординат;

L_t — длина отрезка касательной, заключенного между осями координат;

P_t — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную;

X_n , Y_n — отрезки, отсекаемые нормалью на осях абсцисс и ординат;

L_n — длина отрезка нормали, заключенного между осями координат;

P_n — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на нормаль.

Знак l означает длину отрезка l .

Имея в виду указанные обозначения, доказать для кривых п. 1--30 следующие свойства:

$$1. \quad x = a \left(\cos t + \log \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), \quad y = a \sin t, \quad T = a.$$

$$2. \quad x = x_0 + a (\log \sin t - \sin^2 t), \\ y = a \sin t \cos t, \quad N^2, \quad T^2 = a^2, \quad N \cdot T = ay.$$

$$3. \quad x = x_0 + a \left[\frac{\cos t}{2 \sin^2 t} + \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) + \frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right], \\ y = a \left(\frac{1}{\sin t} + \frac{1}{\cos t} \right), \quad N, \quad T = \frac{y^2}{a}.$$

$$4. \quad x = a (\sin t + \cos t), \quad y = y_0 + a \left[\sin t \cos t - \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \right], \\ \frac{1}{T} + \frac{1}{N} = \frac{x}{ay}$$

$$5. \quad x = x_0 + \frac{a}{3} \cdot \frac{1 - 3\sin^2 t}{(\sin t)^{3/2}}, \quad y = \frac{a \cos t}{\sqrt{\sin t}} \dots N \cdot S_n = a^2.$$

$$6. \quad x = \frac{a}{\sin^2 t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cot^2 t}, \quad y = a \cot t \cdot e^{-\frac{1}{2} \cot^2 t} \dots N \cdot T = x \cdot y, \\ N^2 + T^2 = x^2.$$

$$7. \quad x = x_0 + a \left[\log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) - \log \operatorname{tg} t \right], \\ y = a \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \dots N + S_n = a.$$

$$8. \quad x = x_0 + \frac{a}{2} (2t + \sin 2t), \quad y = \frac{a}{2} (1 - \cos 2t) \dots N \cdot T = a \cdot S_n.$$

$$9. \quad x = x_0 + a \left(-\sin t + \frac{1}{2\sin^2 t} \right), \quad y = a (\cos t + \cot t) \dots \\ \frac{1}{N} + \frac{1}{S_n} = \frac{1}{a}.$$

$$10. \quad x = x_0 + a \left(\log \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t - \sin t \right), \quad y = a (\sin t + \cos t) \dots \\ \frac{1}{N} + \frac{1}{T} = \frac{1}{a}.$$

$$11. \quad x = a (1 - \sin t), \quad y = a \cos t \dots L_n = |S_t| + S_n, \\ X_n \cdot Y_n = N \cdot T.$$

$$12. \quad x = a \cos t + (b + at) \sin t, \quad y = a \sin t - (b + at) \cos t \dots P_n = a, \\ \frac{1}{X_n^2} + \frac{1}{Y_n^2} = \frac{1}{a^2}.$$

$$13. \quad x = a + b \sin t, \quad y = a - b \cos t \dots \frac{1}{X_n} + \frac{1}{Y_n} = \frac{1}{a}.$$

$$14. \quad x = a \sin t, \quad y = -a \cos t \dots \frac{1}{X_t^2} + \frac{1}{Y_t^2} = \frac{1}{a^2}, \quad P_t = a.$$

$$15. \quad x = \frac{a(\cos t - \sin t)}{\sqrt{1 - \sin t \cos t}} \cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} t - 1}{\sqrt{2}}}, \\ y = x \cdot \frac{\cos t}{\cos t - \sin t} \dots L_n = T.$$

$$16. \quad x = \frac{a}{\sqrt{\sin t - \cos^2 t}} \cdot \left(\frac{2 \sin t + 1 - \sqrt{5}}{2 \sin t + 1 + \sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{2\sqrt{5}}},$$

$$y = x \cos t, \quad \dots \quad N = x, \quad S_n \cdot T = xy.$$

$$17. \quad x = \frac{a}{\sin \frac{t}{2} \sqrt{\sin t}} \cdot e^{-\frac{1}{4 \sin^2 \frac{t}{2}}}, \quad y = x \sin t, \quad \dots \quad T = x.$$

$$18. \quad x = \frac{a}{1 - \sin t \cos t} \cdot e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} t - 1}{\sqrt{3}}}, \quad y = x \sin^2 t, \quad \dots \quad T^2 = xy.$$

$$19. \quad x = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t} \cdot y, \quad y = a e^t \cdot \sqrt{\cos 2t \cdot \cot \left(\frac{\pi}{4} + t \right)}, \quad \dots$$

$$L_t = L_n, \quad P_t = P_n.$$

$$20. \quad x = a \sin t, \quad y = a (1 - \cos t), \quad \dots \quad P_n = x, \quad P_t = y,$$

$$21. \quad x = b \sin t, \quad y = a - b \cos t, \quad \dots \quad P_n \cdot N = a \cdot S_n.$$

$$22. \quad x = (a - b) \sin t - \frac{1}{2} a \sin^3 t, \quad y = b \cos t + \frac{1}{2} a \sin^2 t \cos t, \quad \dots$$

$$L_n = a.$$

$$23. \quad y = a e^{-\frac{x}{y}}, \quad \dots \quad L_t = N.$$

$$24. \quad bx = a^2 e^{\frac{y^2}{2a^2}}, \quad \dots \quad P_t \cdot N = a^2 - y^2.$$

$$25. \quad (y - 2x)^3 = a (y - x), \quad \dots \quad S_n = 3y - 2x.$$

$$26. \quad xy = a^3, \quad \dots \quad X_t \cdot Y_t = 4a^2, \quad L_t \text{ делится в точке } (x, y) \text{ пополам.}$$

$$27. \quad x^\lambda + y^\lambda = a^\lambda, \quad \lambda = \frac{k}{k+1}, \quad \dots \quad X_t^k + Y_t^k = a^k.$$

$$28. \quad x^2 - y^2 = a^2, \quad \dots \quad S_n = x, \quad x \cdot T = y \cdot N, \quad L_n \text{ делится точкою } (x, y) \text{ пополам.}$$

$$29. \quad x^n y^m = a^{n+m}, \quad \dots \quad L_t \text{ делится в отношении } m:n \text{ точкою кас. } (x, y).$$

$$30. \quad y^2 + 16px = 0, \quad \dots \quad L_t \text{ делится пополам параболой } y^2 = 2px.$$

В задачах 31—40 введены следующие обозначения (в полярной системе координат):

S_t — полярная подкасательная, S_n — пол. поднормаль, T — полярная длина касательной, N — пол. длина нормали, P_t — длина перпендикуляра, опущенного из полюса на касательную, P_n — длина перпендикуляра, опущенного из полюса на нормаль. Имея в виду эти обозначения, доказать для кривых 31—40 следующие свойства:

$$31. r = a \cos u, \theta = \theta_0 + u - \operatorname{tg} u \dots T = a, S_t = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

$$32. r = a \sin u \cos u, \theta = \theta_0 + 2u - \operatorname{tg} u \dots N^2 + T^2 = a^2, \\ S_n \parallel S_t, S_t = a.$$

$$33. r = \frac{a \sin u \cos u}{\sin u + \cos u}, \theta = \theta_0 + u - \operatorname{tg} u + \log(1 + \operatorname{tg} u) \dots \\ N + T = a.$$

$$34. r = a(1 - \sin u \cos u), \theta = \theta_0 - u - \frac{1}{2} \operatorname{tg} u \dots N \cdot T = a^2.$$

$$35. r = a(1 - \sin u + \cos u), \theta = \theta_0 - u - \log(1 + \operatorname{tg} u) \dots \\ \frac{1}{N} + \frac{1}{T} = \frac{1}{a}.$$

$$36. r = \frac{a}{\cos u}, \theta = \theta_0 - u + \operatorname{tg} u \dots T = \frac{r^2}{a}.$$

$$37. r = a \sqrt{1 - \cos u}, \theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(u + \operatorname{tg} u) \dots N \cdot S_t = a^2.$$

$$38. r = a \sin(\theta - \theta_0) \dots N = a, P_t = \frac{r^2}{a}.$$

$$39. r^2 = \frac{a^2}{\sin 2(\theta - \theta_0)} \dots N = \frac{r^2}{a^2}.$$

$$40. r^2 = a^2 \sin 2(\theta - \theta_0) \dots T \cdot S_n = a^2.$$

Для кривых, приведенных в задачах 41—49, требуется доказать, что длина дуги между любыми двумя точками равна разности двух значений некоторой функции координат, — значений, отвечающих концу и началу дуги, что для краткости обозначено следующим образом: $s_1 - s_0 = [f(x, y)]_0^1$.

$$41. x = x_0 + \frac{1}{4} \left[\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \log \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right], y = a \sin t \dots \\ s_1 - s_0 = \left(\frac{y^2}{a} \right)_0^1.$$

$$42. x = x_0 + a \left[\log \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right], y = a \sin t \dots \\ s_1 - s_0 = \left(a \log \frac{y}{a} \right)_0^1.$$

$$43. \quad r = r_0 + \frac{a}{8}(2t + \sin 2t), \quad y = \frac{a}{8}(1 - \cos 2t)$$

$$s_1 - s_0 = \frac{1}{8} ay|_0^1.$$

$$44. \quad y = a \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{a} \dots s_1 - s_0 = \left(\frac{y^2}{T} \right)_0^1.$$

$$45. \quad \left(y - \frac{4}{9} a \right)^n = a (r - r_0)^2 \dots s_1 - s_0 = \left(\frac{1}{a} y^{n+1} \right)_0^1.$$

$$46. \quad r = \frac{a \sin u}{1 - \sin u - \cos u} e^{\frac{1}{2}u}, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2} \log (\sin u - \cos u) \dots$$

$$s_1 - s_0 = (N).$$

$$47. \quad r = a \sqrt{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right)}, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \frac{1 + \sin u}{3 \cos^2 u} - \frac{1}{3} \operatorname{tg} u \dots$$

$$s_1 - s_0 = (S_1)_0^1.$$

$$48. \quad r = \frac{a}{1 - \sin u \cos u} e^{\frac{1}{V^{1+\sin u}} \frac{2 \operatorname{tg} u - 1}{V^{1-\sin u}}}.$$

$$\vartheta = \vartheta_0 - u + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} u - 1}{1 - 3 \sin^2 u} \dots s_1 - s_0 = (P_1).$$

$$49. \quad r = ae^{u^2} \dots s_1 - s_0 = (T)_0^1.$$

В задачах 50—63 доказать ортогональность следующих систем кривых при произвольных параметрах a и b , т. е. доказать, что каждая кривая одной системы пересекает каждую кривую другой системы под прямым углом.

$$50. \quad y^2 + 2ax = a', \quad y^2 - 2bx = b'; \quad a > 0, \quad b > 0).$$

$$51. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a'^2} = 1, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1; \quad (c \text{ — постоянное, } a < c < b).$$

$$52. \quad xy = a^2, \quad x^2 - y^2 = b^2$$

$$53. \quad x^2 + y^2 - 2ay = 0, \quad x^2 - y^2 - 2bx = 0$$

$$54. \quad x^2 + \frac{1}{2} y^2 = a^2, \quad y^2 - 2bx =$$

$$55. \quad x^2 - \frac{1}{3} y = a^2, \quad xy^2 = b^2.$$

$$56. \quad x^2 + y = a^2, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = b.$$

57. $x^2 = ay^2, 2x^2 + 3y^2 = b^2$.

58. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), (x^2 + y^2)^2 = b^2xy$.

59. $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = a^4, x^2y - xy^2 = b^4$.

60. $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 = a^5, 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 = b^5$.

61. $(x^2 + y^2)^3 = a^3(x^3 - 3xy^2), (x^2 + y^2)^3 = b^3(3x^2y - y^3)$.

62. $\cos y = ae^{-y}, \sin y = be^{-y}$.

63. $r^4 = a^4 \sin k\theta, r^4 = b^4 \cos k\theta$.

64. Доказать, что кривые $r^4 = a^4 \sin k\theta$ и $r^4 = b^4 \sin(k\theta + \omega)$ пересекаются под углом ω .

Найти параллельные кривые для следующих кривых:

65. $y^2 = 2px$.

66. $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$.

67. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

68. $r = a(1 + \cos \theta)$.

Найти подэры следующих кривых в прямоугольных координатах (подэрою данной кривой относительно точки (x_0, y_0) называется общее место оснований перпендикуляров, опущенных из точки (x_0, y_0) на все касательные данной кривой):

69. $y^2 = 2px$ относит. $(0, 0)$.

70. $y^2 = 2px$ относ. $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

71. $xy = a^2$ отн. $(0, 0)$

72. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ отн. $(0, 0)$.

73. $x^2 = a^2y$ отн. $(0, 0)$.

74. $x = -a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ отн. $(0, 0)$.

75. $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$ отн. $(0, 0)$.

Найти подэры следующих кривых (в полярных координатах) относительно полюса:

76. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

77. $r = 2a \cos \theta$.

78. $r = a(1 + \cos \theta)$.

79. $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}$.

80. $r = \frac{a}{1 + \cos \theta}$.

81. $r^4 = a^4 \cos k\theta$.

82. $r = a\theta$.

83. $r = ae^{m\theta}$.

84. $r = a(\sin \theta + \cos \theta)$.

Найти радиусы кривизны следующих кривых;

85. $x = a \cos t + (b + at) \sin t, y = a \sin t - (b + at) \cos t$.

86. $x = a[(n+1) \cos t - \cos(n+1)t], y = a[(n+1) \sin t - \sin(n+1)t]$.

$$87. x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$$

$$88. x = 3a \sin^2 t, y = a \cos t (3 \cos^4 t - 10 \cos^2 t + 15).$$

$$89. x = a [\sin t \cos t (2 \cos^2 t + 3) + 3t], y = 2a \cos^4 t.$$

$$90. x = a \sin^3 t, y = a \cos t (3 - \cos^2 t).$$

$$91. x = a [2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t], y = a [2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t].$$

$$92. x = 3a \left[\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \right], y = \frac{2a}{\cos^3 t}.$$

$$93. x = ae^{-t} (\cos t - \sin t), y = ae^{-t} (\cos t + \sin t).$$

$$94. x = x_0 + 4a \left(t + \frac{1}{3} t^3 \right), y = a (1 + t^2)^2.$$

$$95. x = x_0 + ak \int \frac{dt}{\cos^4 t}, y = \frac{a}{\cos^4 t}.$$

Для кривых 96—108 доказать соотношения между радиусом кривизны R , координатами точки x, y и отрезками T, N, S_t, S_n (см. в начале III отд.):

$$96. x = x_0 + a \log \frac{\sin t}{1 - \sin t}, y = atg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \dots R^3 = N^3 + T^3.$$

$$97. x = atg \frac{t}{2}, y = y_0 + \frac{a}{2} \log \frac{1 + \cos t}{\cos t} \dots R^3 y^3 = x^3 (N^3 + T^3).$$

$$98. x = atg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right),$$

$$y = y_0 + \frac{a}{2} \left[\frac{1 + \sin t}{\cos^2 t} - \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \right] \dots R = \frac{x N^2}{y^3}.$$

$$99. x = x_0 - \frac{a}{4 \cos^2 \frac{t}{2}} + \frac{a}{2} \log \operatorname{tg} \frac{t}{2}, y = a \operatorname{tg} \frac{t}{2} \dots R = \frac{T^2}{y}.$$

$$100. x = a \sin t, y = y_0 - a \cos t \dots R = \frac{x T}{y}.$$

$$101. x = x_0 + a \log \operatorname{tg} t, y = atg t \dots R = \frac{N T^2}{y^3}.$$

$$102. x = \frac{a}{2} \operatorname{tg} t, y = y_0 + \frac{a}{4} \operatorname{tg}^2 t \dots R = \frac{x T N^2}{y^3}.$$

$$103. x = x_0 + a \left(\cos t + \log \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), \quad y = a \sin t \dots R = \frac{yT}{S_n}$$

$$104. x = x_0 + \frac{k}{4} (1 - \cos 2t), \quad y = y_0 + \frac{k}{4} (2t - \sin 2t), \quad R = k \frac{y}{T}.$$

$$105. x = x_0 - \frac{1}{2} k \cot^2 t, \quad y = y_0 - k \cot t \dots R = k \left(\frac{N}{S_n} \right)^2.$$

$$106. x = x_0 - k \cos t,$$

$$y = y_0 + k \left[\log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) - \sin t \right] \dots R = k \cdot \frac{S_n}{y}.$$

$$107. x = x_0 + kt, \quad y = y_0 - k \log \cos t \dots R = k \frac{N}{y}.$$

$$108. x = x_0 + k \log \sin t, \quad y = y_0 + kt \dots R = k \frac{T}{y}.$$

В задачах 109—118 доказать для кривых соотношения между радиусом кривизны R и длиной дуги s , отсчитываемой от начала координат ($t = 0$):

$$109. x = 2a (t \sin t + \cos t - 1),$$

$$y = 2a (\sin t - t \cos t) \dots R = 2 \sqrt{as}.$$

$$110. x = 3a (t \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t),$$

$$y = 3a (t^2 \cos t - 2t \sin t + 2 \cos t - 2) \dots R = 3 \sqrt{as^3}.$$

$$111. x = at, \quad y = a \log \sec t \dots R = a \operatorname{ch} \frac{s}{a}.$$

$$112. x = \frac{a}{\sqrt{2}} \log \frac{1 + \sqrt{2} \sin t}{1 - \sqrt{2} \sin t},$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{1 + 2 \cos t + 1}{\sqrt{2 \cos t - 1}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \right) \dots R = 2a \operatorname{ch} \frac{s}{a}.$$

$$113. x = a \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right), \quad y = a (\sec t - 1) \dots R = \frac{a^2 + s^2}{a}$$

$$114. x = \frac{a}{4} (2t + \sin 2t), \quad y = \frac{a}{4} (1 - \cos 2t) \dots R = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{s}.$$

$$115. x = a (1 - \cos t),$$

$$y = a \left[\log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) - \sin t \right] \dots R = a \sqrt{e^{\frac{s}{a}} - 1}.$$

$$116. x = \frac{a}{2} e^t (\sinh t + \cosh t - 1),$$

$$y = \frac{a}{2} e^t (\sinh t - \cosh t + 1) \dots R = a + s.$$

$$117. x = \frac{a}{2} (\operatorname{sh} t \cosh t + \cosh t \sinh t),$$

$$y = \frac{a}{2} (\operatorname{sh} t \sinh t - \cosh t \cosh t + 1) \dots R = \sqrt{a^2 + s^2}.$$

$$118. x = \frac{a}{3} (1 - \cos^3 t), y = \frac{a}{3} \sin^3 t \dots R = \sqrt{2as - 4s^2}.$$

В задачах 119—132 доказать для кривых, заданных в полярных координатах, соотношения между радиусом кривизны R , радиусом-вектором r и отрезками S_t, S_n, T, N, P_t, P_n (см. обозначения после примера 30).

$$119. r = a \operatorname{sech} u, \theta = \theta_0 + \operatorname{tg} u - u \dots R = P_t.$$

$$120. r = a \operatorname{tg} \frac{u}{2}, \theta = \theta_0 + \log \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \dots R = \frac{(a^2 + r^2)}{4a}.$$

$$121. r = \frac{a}{1 - \cos u} e^{\frac{1}{2} u},$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{1}{2} \log (\cos u - \sin u) - \frac{1}{2} u \dots R = T.$$

$$122. r = \frac{a}{\sin \frac{u}{2} \sqrt{\sin u}} e^{-\frac{1}{4} \pi + \frac{u}{2}}, \theta = \theta_0 + u \cot \frac{u}{2} \dots R = S_n.$$

$$123. r = \frac{a}{1 - \sin u \cos u} e^{\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u}},$$

$$\theta = \theta_0 - u + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{2 \tan u + 1}{1 - 3} \dots R = P.$$

$$124. r = a \sqrt{\operatorname{tg} \frac{u}{2}} e^{\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2}},$$

$$\theta = \theta_0 + \cot \frac{u}{2} \dots R = T + N, R = S.$$

$$125. r = a \cot u, \theta = \theta_0 - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right), R = \frac{N^2}{r}.$$

$$126. r = a \cot u, \theta = \theta_0 - \operatorname{tg} u \dots R = \frac{N^2}{r^2}.$$

$$127. r = \frac{a}{\sin u} \sqrt{\sin u - \cos u} \cdot e^{-\frac{1}{2}u},$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \log (\sin u - \cos u) \dots R = \frac{NS_n}{r}.$$

$$128. r = \frac{a}{1 - \sin u}, \theta = \theta_0 - u + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right), \dots R = r.$$

$$129. r = ae^u, \theta = \theta_0 - \log \cos u. \dots \frac{1}{R} = \frac{1}{T} + \frac{1}{N}.$$

$$130. r^{k-1} = a^{k-1} \sin (k-1) (\theta - \theta_0), \dots R = \frac{1}{k} N.$$

$$131. r = a (1 + \cos \theta), \dots R = \frac{2}{3} N = \frac{2}{3} \sqrt{2ar}.$$

$$132. r^2 = a^2 \cos 2\theta, \dots R = \frac{1}{3} N = \frac{a^3}{3r}.$$

Найти эволюты следующих кривых:

$$133. x = a (2 \cos t - \cos 2t), y = a (2 \sin t - \sin 2t).$$

$$134. x = a (3 \cos t - \cos 3t), y = a (3 \sin t - \sin 3t).$$

$$135. x = -a \cos^2 t, y = a \sin^2 t.$$

$$136. x = \frac{1}{2} p \cot^2 t - k \sin t, y = p \cot t + k \cos t.$$

$$137. x = a \cos t + (b + at) \sin t, y = a \sin t - (b + at) \cos t.$$

$$138. x = ae^{-t} (\cos t - \sin t), y = ae^{-t} (\cos t + \sin t).$$

$$139. x = a [2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t], y = a [2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t].$$

$$140. x = 3a \left[\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \right], y = \frac{2a}{\cos^2 t}.$$

$$141. x = 4a \left(t + \frac{1}{3} t^3 \right), y = a (1 + t^2)^2.$$

$$142. x = a \left(t + \sin t \right) + b \sin \frac{t}{2}, y = a (3 + \cos t) + b \cos \frac{t}{2}.$$

$$143. x = -a \sin t - \frac{p}{2} \sin t \cdot \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right),$$

$$y = a \cos t - \frac{p}{2} \operatorname{tg} t + \frac{p}{2} \cos t \cdot \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right).$$

$$144. x = \cos t \left(b + \frac{1}{2} a \sin^2 t \right), y = \sin t \left(a - b - \frac{1}{2} a \sin^2 t \right).$$

$$145. x = t - b \operatorname{th} \frac{t}{a}, y = a \operatorname{ch} \frac{t}{a} + \frac{b}{\operatorname{ch} \frac{t}{a}}.$$

$$146. x = t + \frac{a^2 b}{V a^4 + t^4}, y = \frac{a^2}{t} + \frac{b t^2}{V a^4 + t^4}.$$

$$147. x = t - \frac{b t^2}{V a^4 + t^4}, y = \frac{t^3}{3 a^2} + \frac{a^2 b}{V a^4 + t^4}.$$

$$148. x = a \cos t + \frac{k b \cos t}{V a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}, y = b \sin t + \frac{k a \sin t}{V a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

$$149. x = a \operatorname{ch} t + \frac{k b \operatorname{ch} t}{V a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t}, y = b \operatorname{sh} t - \frac{k a \operatorname{sh} t}{V a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t}.$$

$$150. r = a \theta.$$

$$151. r^2 = a^2 \cos 2 \theta.$$

$$152. r = a (1 + \cos \theta).$$

$$153. r^n = a^n \cos n \theta.$$

Найти огибающие кривые для следующих систем огибаемых кривых:

154. Окружностей, построенных на главных хордах параболы $y^2 = 2px$, как на диаметрах.

155. Окружностей, построенных на главных хордах эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, как на диаметрах.

156. Окружностей, построенных, как на диаметрах, на хордах окружности $x^2 + y^2 = a^2$, параллельных оси y .

157. Окружностей постоянного радиуса R , центры которых лежат на окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

158. Окружностей, центры которых лежат на данной окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ и которые проходят через начало координат.

159. Поляр параболы $y^2 = 2px$, если полюсы лежат на параболе $y^2 = 2qx$ ($q > p$).

160. Поляр гиперболы $xy = a^2$, если полюсы лежат на гиперболы $xy = b^2$ ($b^2 < a^2$).

161. Поляр эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, если полюсы лежат на эллипсе $\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$.

162. Поляр эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, если из полюсов этот эллипс виден под прямым углом.

163. Хорд, соединяющих концы двух сопряженных диаметров эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

164. Различных положений прямой, которая вращается с постоянною угловою скоростью ω вокруг одной из своих точек, в то время, как эта точка сама движется по прямой (оси x) с постоянною скоростью v .

165. Различных положений прямой, концы которой движутся по сторонам прямого угла с постоянными скоростями v_1, v_2 , причем в начальный момент эти концы находятся в расстоянии a_1, a_2 от вершины прямого угла.

166. Различных положений прямой, которая представляет перпендикуляр, восстановленный в середине отрезка постоянной длины a , скользящего концами по сторонам прямого угла.

167. Различных положений отрезка постоянной длины a , который скользит одним концом по оси y , а другим концом по окружности: $x = acost$, $y = asint$.

168. Различных положений окружности постоянного радиуса R , центр которой движется по параболе $y^2 = 2px$, а также огибающую тех траекторий, которые описывают при этом движении точки окружности, если определенный диаметр ее остается параллельным оси x .

169. Подобная же задача при движении центра окружности по эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

170. Подобная же задача при движении центра окружности по гиперболе $xy = a^2$.

171. Эллипсов с полуосями a и b , у которых оси параллельны осям координат и центры лежат на эллипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

172—177. Найти огибающую системы эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при следующих условиях:

172. $a + b = c$ (постоянное).

173. $ab = c^2$.

174. $a^2 + b^2 = c^2$.

175. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$.

176. $a - b = c$.

177. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

178—181. Найти огибающие следующих систем прямых (t переменный параметр).

178. $y = tx + \frac{a}{2t}$.

179. $y = tx + \frac{a}{t^2}$.

180. $y = tx + \frac{at}{t-1}$.

181. $(x-a) \sin t - y \cos t = a$.

182—185. Найти кривые, касательные которых $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ обладают следующими свойствами:

182. $\alpha\beta = a^2$.

183. $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} = 1$.

184. $\alpha^n + \beta^n = a^n$.

185. $\frac{\alpha^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\beta^2} = 1$.

186. Найти кривую, касательные которой находятся в постоянном расстоянии a от точки (x_0, y_0) .

187. Найти кривую, для которой произведение перпендикуляров, опущенных на касательную из двух постоянных точек $(c, 0)$ и $(-c, 0)$, равно постоянному b^2 .

188. Решить задачи 133—149, рассматривая эволюту как огибающую нормалей эвольвенты.

Вычертить графики следующих кривых:

189. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

190. $y = e^{\frac{1}{x^2}}$.

191. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

192. $y = e^{-x}$.

193. $y = e^{x^2}$.

194. $y = x^2 e^x$.

$$195. y = e^x - x + 1. \quad 196. y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}. \quad 197. y = e^{-x} \cos x.$$

$$198. y = x^2 \log x. \quad 199. y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$200. y = x^{\frac{m}{n}} \text{ (} m \text{ и } n \text{ взаимно простые).}$$

$$201. y = 0,2x^2 + 0,3x^3 - 1,2x + 0,1. \quad 202. y = 0,1x^4 - 0,4x^3 + 0,4x^2 + 0,5.$$

$$203. y = 0,3x^5 - 2,5x^3 + 6x + 1. \quad 204. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

$$205. y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1}. \quad 206. y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - x - 2}.$$

$$207. y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}. \quad 208. y = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

$$209. y = \sin^4 x + \cos^4 x. \quad 210. y = \log \frac{1+x}{2-x}.$$

$$211. y = \log \frac{x+1}{x-2}. \quad 212. y = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}.$$

$$213. y = \frac{1}{x-1} x^2. \quad 214. y^2 + x^3 - x^4 = 0.$$

$$215. y^3 - x^3 + x^4 = 0.$$

Вычертить графики кривых, заданных параметрическими уравнениями:

$$216. x = a(1+t^2), y = at(1+t^2). \quad 217. x = at(1-t), y = at^2(1-t).$$

$$218. x = at^2(1+t), y = at^3(1+t). \quad 219. x = a(1-t^2), y = at(1-t^3).$$

$$220. x = a(1-t^2), y = at(1-t^2). \quad 221. x = a(1-t)^2, y = at(1-t)^2.$$

$$222. x = \frac{at^2}{1+t}, y = \frac{at^3}{1+t}. \quad 223. x = \frac{at^2}{1+t}, y = \frac{at^4}{1+t}.$$

$$224. x = \frac{at^3}{1-t^2}, y = \frac{at^4}{1-t^2}. \quad 225. x = \frac{at^2}{1+t^2}, y = \frac{at^4}{1+t^2}.$$

$$226. x = \frac{at^2}{1-t^2}, y = \frac{at^3}{1-t^2}. \quad 227. x = \frac{a}{1-t^2}, y = \frac{at}{1-t^2}.$$

$$228. x = \frac{at^2}{1+t^4}, y = \frac{at^3}{1+t^4}.$$

$$229. x = \frac{at^3}{1+t^4}, y = \frac{at^4}{1+t^4}.$$

$$230. x = \frac{4at}{1-t^4}, y = \frac{4at^3}{1-t^4}.$$

$$231. x = 2a \sin^3 t, y = 2a \frac{\sin^2 t}{\cos t}.$$

$$232. x = a \cos t, y = a \cos t \cot \frac{t}{2}.$$

Найти точки перегиба следующих кривых:

$$233. x^3 - y^2 = ay^2.$$

$$234. x^3 + x^2y + 2ay^2 = 0.$$

$$235. y^3 = 3a(x^3 + y^3).$$

$$236. x^4 - x^2y^2 + 5ay^3 = 0.$$

$$237. y^4 + xy^2 = \frac{1}{8}ax^3.$$

$$238. y^4 - x^4 = 2axy^2.$$

$$239. x^2y + a^2y = a^3.$$

$$240. 4xy^2 + 36axy + 81a^2(x-y) + 729a^3 = 0.$$

$$241. 3y^3 + 3xy^2 = 2ax^3.$$

$$242. r = \frac{a}{\cos^4 \theta}.$$

$$243. r = \frac{a}{\sin^4 \theta}.$$

$$244. r^2 = a^2(1 + 2 \cos^2 \theta).$$

$$245. r = a(2 \cos \theta + 3).$$

$$246. r = a(32 \sec \theta + 5).$$

$$247. r = \frac{a \cos^2 \theta}{\sin^3 \theta (\cos \theta + \sin \theta)}.$$

Исследовать фигуру кривой в области начала координат для следующих уравнений:

$$248. x^4 + x^2y^2 - y^2 + 5xy - 6x^2 = 0.$$

$$249. 2y^3 - xy^2 + y^2 - 4xy + 3x^2 = 0.$$

$$250. y^4 - x^4 + x^2 + 4xy + 4y^2 = 0. \quad 251. x^3 + xy^2 - 9y^3 + 6xy - x^2 = 0.$$

$$252. y^5 - 6x^4 + 2x^2y^3 + 5x^2y - y^2 = 0.$$

$$253. x^6 - 2x^4 - 3xy^2 - x^2y + y^2 = 0.$$

$$254. x^5 + x^4 - 3xy^2 - 2x^2y + y^2 = 0.$$

$$255. x^5 + 2xy^3 - x^4 + 4x^2y - 4y^2 = 0.$$

$$256. y^7 + 2x^4y - 3x^3 = 0.$$

$$257. y^6 - x^4y + 2x^2 = 0.$$

$$258. x^7 + xy^5 - y^4 = 0.$$

$$259. x^5 + xy^4 + y^2 = 0.$$

$$260. x^5 + y^5 - x^3y + 4xy^3 = 0.$$

$$261. y^5 + 2x^4 + x^2y - xy^2 = 0.$$

$$262. x^6 + y^6 - 4x^2y^2 + x^4y = 0.$$

$$263. y^6 + x^6 - xy^4 - x^4y^2 = 0.$$

$$264. x^7 - y^6 + x^2y^3 - x^4y = 0.$$

$$265. y^5 + x^4 - xy^2 = 0.$$

$$266. -x^5 - y^4 + xy^2 = 0.$$

$$267. x^5 + y^5 - 2xy = 0.$$

Найти асимптоты следующих кривых.

268. $x^3 - xy^2 - x^2 + 2xy + y^2 = 0$.

269. $x^2y - xy^2 - 2y^3 - 4y^2 + x^2 - 2 = 0$.

270. $2x^5 - 3x^2y + xy^2 + 2x^2 - ry + y - 1 = 0$.

271. $2x^2y + xy^2 - y^3 + xy + y^4 - x + 1 = 0$.

272. $2x^5 - 5x^2y + 2xy^2 + 4x^2 - 10xy + 4y^3 + x + 1 = 0$.

273. $3x^3y + 2xy^2 - y^3 - 6x^3 - 4xy + 2y^2 + y - 1 = 0$.

274. $3x^2y - 4xy^2 + y^3 + xy - y^2 + x - 1 = 0$.

275. $x^3 + 5x^2y + 6xy^2 - x^2 - 2xy + y - 2 = 0$.

276. $x^4 - 4x^2y^2 + y^4 = 0$.

277. $x^5 + x^2y^3 - x^4 + 2x^2y - y^3 = 0$.

278. $r = \frac{a}{1 - 2 \sin \theta}$

279. $r = a (\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta)$.

280. $r = a \cdot \frac{\sin 2\theta - \alpha}{\sin (\alpha - \theta)}$.

281. $r = \frac{a \sin 2\theta}{1 - \tan \theta}$.

282. $r = a \cdot \frac{\sin^2 \theta}{1 + 2 \cos \theta}$.

283. $r = a \tan \frac{\theta}{2}$.

284. $r = \frac{a}{3 - \tan^2 \theta}$.

285. $r = \frac{a \sin^2 \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$.

Составить уравнения линий 3-го порядка по следующим данным:

286. Даны: три асимптоты: $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$ и три точки $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,1)$.

287. Даны: двойная точка $(0,0)$ с пучком касательных $x^2 - y^2 = 0$ и две асимптоты $x = 1$, $y = 2$.

288. Даны: точка возврата $(0,0)$ с касательной $y = 0$, асимптота $x = 2$ и две точки $(1,1)$ и $(-1,2)$.

289. Даны: точка возврата $(1,1)$ с касательной $y = x$ и две касательные: $x = 0$ с точкой касания $(0,3)$, $y = 0$ с точкой касания $(2,0)$.

290. Даны: две асимптоты $x - y + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$, касательная $y = 0$ в точке $(1,0)$ и двойная точка $(-1,-1)$.

291. Даны: три асимптоты $x - y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x + 2 = 0$ и двойная точка в начале координат.

292. Даны: узел $(0,0)$ с пучком касательных $x^2 - 4y^2 = 0$, асимптота $2x + y - 1 = 0$ и касательная $y = x + 2$ в точке $(-1,1)$.

293. Даны: точка возврата $(0,0)$, с касательною $x+y=0$, асимптота $y-1=0$ и две точки $(-1,2)$ и $(0,-1)$.

294. Если кривая 3-го порядка имеет три асимптоты и пересекает каждую из них, то три точки пересечения лежат на одной прямой. Если же кривая имеет три асимптоты, но пересекает только 2 из них, то две точки пересечения лежат на прямой, параллельной третьей асимптоте.

295. Если кривая 3-го порядка имеет 2 двойных точки, то она представляет совокупность прямой и линии 2-го порядка. Если кривая 3-го порядка имеет 3 двойных точки, то она представляет систему трех пересекающихся прямых.

Вычертить графики алгебраических кривых:

296. $x^2y - xy^2 - 2a^3 = 0.$

298. $x^3 - y^3 - 3axy = 0.$

300. $x^3 - x^2y - ay^2 = 0.$

302. $x^4 - xy^3 + ay^3 = 0.$

304. $x^4 - ax^3 - ay^2 = 0.$

306. $x^4 - a(x-y)^2 = 0.$

308. $x^4 - axy^2 - ay^4 = 0.$

310. $x^4 - x^2y^2 - ay^4 = 0.$

312. $x^4 - x^2y^2 - ay^4 = 0.$

314. $x^4 + y^4 - 4ax^3 = 0.$

316. $x^4 + y^4 - 4a^2y = 0.$

318. $x^4 + y^4 - 2axy = 0.$

320. $x^4 - x^2y^2 + a^2x^2 - a^2y^2 = 0.$

322. $xy^2 - 4ax - 8a^2 = 0.$

324. $x^2y^2 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0.$

325. $(x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0.$

326. $x^4 - 2x^2y^2 - 2a^2x^2 - 2a^2y^2 + a^4 = 0.$

327. $(x^2 - y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0.$

328. $x^4 + y^4 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0.$

330. $(x^3 + y^3)^2 - a(x^3 + y^3) = 0.$

331. $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^3 - 2a^2x^2 + a^4 = 0.$

332. $x^2y - xy^2 - x - y + 2 = 0.$

334. $x^2y^3 - 2x^2y + x^2 - y = 0.$

336. $x^4 - x^2y^2 - 6ax^2y + a^2y^3 = 0.$

338. $-2x^4 + x^3y + x^2y^2 + 4x^2y - y^2 = 0.$

297. $x^3 - y^3 - ay^2 = 0.$

299. $y^3 - x^3 + 3ax^2 = 0.$

301. $x^3 - xy^2 - 2ay^3 = 0.$

303. $x^3 - ax^3 - ay^3 = 0.$

305. $x^4 - axy - ay^2 = 0.$

307. $x^4 - ax^4 - ay^4 = 0.$

309. $x^4 - ax^3y - ay^4 = 0.$

311. $x^4 - x^2y^2 - ay^4 = 0.$

313. $x^4 - x^3y - ay^4 = 0.$

315. $x^4 - y^4 + 4ax^4 = 0.$

317. $x^4 - y^4 - 4ax^2y = 0.$

319. $x^4 - a^3x^2 + a^2y^2 = 0.$

321. $(y^2 - b^2)^2 - a^2x = 0.$

323. $x^3 + xy^2 + a^2x^2 - ay^3 = 0$

329. $xy^2 + 2xy + x - y + 2 = 0.$

333. $x^3 - x^2y - 2xy^2 - y^2 = 0.$

335. $x^2y - y^3 + ax^2 - a^2y = 0.$

337. $x^2y - 4y^3 + y^3 - x^2 = 0.$

Вычертить графики кривых в полярных координатах:

$$339. r = \frac{a}{\cos^2 \theta}.$$

$$341. r = a (\operatorname{tg} \theta - 1).$$

$$343. r = a (\sec \theta + \operatorname{tg} \theta).$$

$$345. r^2 = a^2 \frac{\sin 3\theta}{\cos \theta}.$$

$$347. r = a \cos \theta + b.$$

$$349. r^2 = a^2 \sin 3\theta.$$

$$340. r = a (\cos 2\theta + \sin 2\theta).$$

$$342. r = a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

$$344. r = a (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).$$

$$346. r = a \frac{\sin (2\theta - \alpha)}{\sin (\alpha - \theta)}.$$

$$348. r = a \sec \theta + b.$$

$$350. r = a \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos 3\theta}.$$

351. Найти параболу, ось которой параллельна оси y , и которая имеет с кривой $x^2 = a^2 y$ в точке (a, a) касание возможно высокого порядка.

352. Найти окружность, которая с параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ имеет в точке $(1, 1)$ наивысший порядок касания.

353. Найти две параболы, которые имеют оси параллельные осям координат и образуют с окружностью $x^2 + y^2 = 5a^2$ в точке $(a, 2a)$ касание 2-го порядка.

354. Какого порядка будет касание параболы $x^2 = 2ay$ с ее кругом кривизны в ее вершине?

355. Какого порядка будет касание кривых $x^4 + y^4 = ay^3$, $x^4 = a^3(a - y)$ в точке $(0, a)$?

356. Доказать, что общее место центров эллипсов, которые имеют оси параллельные осям координат и образуют касание 2-го порядка с данной кривою в данной на ней точке, есть равноостронняя гипербола, проходящая через эту точку.

Вычислить длину дуги для следующих линий в пространстве:

$$357. x = z \cos \log z, y = z \sin \log z. \quad 358. x = \sqrt{z} \cos \sqrt{z}, y = \sqrt{z} \sin \sqrt{z}.$$

$$359. x = \sqrt{z} \cos \frac{1}{2} \log z, y = \sqrt{z} \sin \frac{1}{2} \log z.$$

$$360. x = z \cosh z, y = z \sinh z.$$

$$361. x = \operatorname{ch} z, y = \operatorname{sh} z.$$

$$363. x^2 + y^2 = 1, z = \log y.$$

$$362. 6x = z^3, 2y = z^3.$$

$$364. r = \cosh t, y = \sinh t, z = \cosh t.$$

$$365. \quad x = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2, \quad y = -\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2, \quad z = \frac{1}{3}t^3 + t^2.$$

$$366. \quad x = at^2, \quad y = bt^2 \quad \text{при} \quad t = \frac{k+1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{2ka}}{l}.$$

Вычислить косинусы углов касательной, бинормали и главной нормали с осями координат, а также радиусы первой и второй кривизны для следующих кривых в данных на них точках:

$$367. \quad x^2 + y^2 = 2z, \quad x + y = z^2 + 1 \quad \text{в точке} \quad (1, 1, 1).$$

$$368. \quad y^2 = x - z + 3, \quad z^2 = 3 - 2y \quad \text{в точке} \quad (-1, 1, 1).$$

$$369. \quad 2x + y^2 - z^2 = 2, \quad x^2 + 2y - z = 2 \quad \text{в точке} \quad (1, 1, 1).$$

$$370. \quad x^2 + 2y - z^2 = 2, \quad 2x + y^2 - z = 2 \quad \text{в точке} \quad (1, 1, 1).$$

$$371. \quad x^2 + y - 2z = 0, \quad 2x - y^2 + z^2 = -2 \quad \text{в точке} \quad (-1, 1, 1).$$

$$372. \quad x = \cos t + \sin^3 t, \quad y = \sin t (1 - \cos t), \quad z = -\cos t \quad \text{в точке} \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

373. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ в точке $t = 0$ (спираль, начерченная на конусе $x^2 + y^2 = z^2$ и проектирующаяся на плоск. XOY в виде логарифмической спирали $r = e^y$).

374. $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ в точке $t = 0$ (спираль, начерченная на конусе $x^2 + y^2 = z^2$ и проектирующаяся на плоскость XOY в виде спирали Архимеда $r = t^2$).

375. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^{2t}$ в точке $t = 0$ (спираль, начерченная на параболоиде $x^2 + y^2 = z$ и проектирующаяся на плоскость XOY в виде логарифмической спирали $r = e^y$).

376. $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t^2$ в точке $t = 0$ (спираль, начерченная на параболоиде $x^2 + y^2 = z$ и проектирующаяся на плоскость XOY в виде спирали Архимеда $r = t^2$).

377. Доказать, что для конической спирали 373 касательная, бинормаль и главная нормаль составляют постоянные углы с осью конуса (ось z).

378. Найти общее место главных нормалей к винтовой линии: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = kt$.

379. Найти общее место касательных к винтовой линии 378.

380. Найти общее место главных нормалей конической спирали 373.

381. Найти общее место касательных спирали 373.

382. Найти общее место касательных спирали 374.

383. Доказать, что система прямых: $X = Z\varphi(t) + \varphi_1(t)$, $Y = Z\psi(t) + \psi_1(t)$ при условии $\varphi'(t)\psi_1'(t) = \psi'(t)\varphi_1'(t)$ представляет систему касательных к кривой: $x = \varphi_1 + z\varphi$, $y = \psi_1 + z\psi$.

$$z = \frac{\varphi_1'}{\varphi'}$$

384 386. Найти кривые по данной системе их касательных

$$384. X = -Z\sin t + t\sin t + \cos t, Y = Z\cos t - t\cos t + \sin t.$$

$$385. X = Z(\cos t - t\sin t) + t^2\sin t, Y = Z(\sin t - t\cos t) - t^2\cos t.$$

$$386. X = Z \cdot \frac{\cos t - t\sin t}{2t} + \frac{t\cos t + t^2\sin t}{2}$$

$$Y = Z \cdot \frac{\sin t + t\cos t}{2t} + \frac{t\sin t - t^2\cos t}{2}.$$

387. Доказать, что система: $x = at^2 - bt + c$, $y = a_1t^2 + b_1t - c_1$, $z = a_2t^2 - b_2t + c_2$ изображает всегда плоскую кривую.

388. При каком соотношении между коэффициентами кривая $x = at^3$, $y = bt^2 + b_1t + b_2$, $z = ct^2 + c_1t + c_2$ будет плоскою?

389. Доказать, что кривая 365 будет плоскою, и найти уравнение плоскости, ее содержащей.

390. Найти радиусы первой и второй кривизны кривой: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cosh t$.

391—392. Доказать равенство радиусов 1-й и 2-й кривизны для следующих кривых:

$$391. 6x = z^3, 2y = z^2.$$

$$392. x = \cosh z, y = \sinh z.$$

393. На поверхности $f(x, y, z) = 0$ найти такую линию, чтобы во всех ее точках нормали к поверхности были параллельны данной плоскости $lx + my + nz = 0$.

394. На поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ найти линию, во всех точках которой нормали к поверхности составляли бы данный угол α с осью x .

395. На поверхности эллипсоида 394 найти такую линию, чтобы во всех ее точках касательные плоскости к поверхности были удалены от начала координат на расстояние h .

396. Найти касательные плоскости к эллипсоиду 394, параллельные данной плоскости $lx + my + nz = 0$.

397. К эллипсоиду $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1$ провести касательные плоскости через прямую: $\frac{x-3}{6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-3}$.

398. Найти условие, при котором возможно провести через прямую $\frac{x-x_0}{e} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ касательные плоскости к эллипсоиду **394.**

399. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ отсекают от угла, образуемого координатными плоскостями, тетраэдр постоянного объема: $\frac{9}{2} a^3$.

400. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $x^k + y^k + z^k = a^k$ при $\lambda = \frac{k}{k+1}$ отсекают от осей координат отрезки, сумма k -ых степеней которых постоянна и равна a^k .

401. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной в сферических координатах (θ — дополнение до широты, ψ — долгота) уравнением: $\rho = a \cdot \sin \theta \cdot f(\psi)$. (Поверхность представляет общее место окружностей, которые лежат в плоскостях, проходящих через ось z , и построены, как на диаметрах, на радиусах-векторах кривой, заданной в плоскости XOY полярным уравнением $r = af(\psi)$).

402—404. Найти подэрные поверхности относительно начала координат для следующих поверхностей (Подэрною поверхностью называется общее место оснований перпендикуляров, опущенных из постоянной точки на все касательные плоскости данной поверхности).

$$\text{402. } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad \text{403. } cz = xy. \quad \text{404. } \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

405. При каком условии плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ представляет касательную плоскость к эллипсоиду **394**?

406. При каком условии плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ будет касательною к сфере $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ и в какой ее точке?

407. При каком условии две сферы:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = R_1^2$ пересекаются ортогонально (под прямым углом)?

408. При каком условии две сферы примера **407** касаются друг друга?

409. Из точки $(1, 1, 2)$ провести общую касательную плоскость к двум сферам: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ и $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = \frac{3}{4}$.

В задачах 410—412 требуется доказать, что поверхности вида $z = \varphi(x, y)$, содержащие произвольную функцию φ , пересекают ортогонально каждую из поверхностей системы $f(x, y, z, a) = 0$, содержащей произвольный параметр a :

410. $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

411. $2z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ и $x^2 + y^2 = 2az$.

412. $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и $x^2 + y^2 = a^2 z^2$.

413. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $(3x - 2y - 3h)^2 + (x - 2z)^2 - 2(h - 2g)(x - 2z) + h^2 - 4hg = 0$ параллельны прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$.

414. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $[h(x-b) + by]^2 + (b^2 - a^2)y^2 + h^2(z-b)^2 + 2bh y(z-b) = 0$ проходят чрез точку $(b, 0, b)$.

415. Для эллипсоида $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0$ найти уравнение описанного цилиндра, образующие которого параллельны оси z .

416. Найти цилиндр, описанный около эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, если образующие его параллельны прямой $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

417. Найти конус, описанный из точки $(0, 0, c)$ около поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($c > a$).

418. Найти конус, описанный из точки (a, b, c) около сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

419. Найти конус, описанный из точки (x_0, y_0, z_0) около эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

420. Для двух сфер: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = \frac{3}{4}$ найти общий описанный конус.

421. Доказать, что нормали к поверхности: $x^2 + y^2 + z^2 = f(lx + my + nz)$ лежат в одной плоскости с прямою: $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

422. Найти поверхность вращения прямой $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ около прямой $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

423. Найти поверхность вращения окружности $x^2 + y^2 = 2Rx$, $z = 0$ около прямой $x = y = z$.

424. Найти поверхность вращения линии $x^4 + y^4 = a^2xy$, $z = 0$ около прямой $x = y = z$.

425. Доказать, что поверхность $x^2 - 2xy + y^2 + 2z^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$ есть поверхность вращения около оси $x = y$, $z = 0$.

426. Доказать, что поверхность $(x + y)(2x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 2xy) = 3a(2xy - z^2)$ есть поверхность вращения около оси $x = y$, $z = 0$.

427—436. Найти огибающие поверхности для следующих систем огибаемых поверхностей:

427. Плоскостей, параллельных оси z и отстоящих от начала $(0, 0, 0)$ на расстоянии R .

428. Плоскостей, проходящих через начало $(0, 0, 0)$, и отстоящих от точки $(0, b, 0)$ на расстоянии $b \sin \alpha$.

429. Плоскостей, параллельных прямой $x - y = z$ и отстоящих от начала на расстоянии R .

430. Плоскостей: $\alpha x - \beta y + \gamma z = 1$ и $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ (α, β, γ — переменные параметры).

431. Плоскостей: $\alpha x - \beta y + \gamma z = 1$ при условии: $\alpha^2 p + \beta^2 q + 2\gamma = 0$. (см. 430).

432. Плоскостей: $\frac{x}{at} - \frac{y}{bt} + 1 - \frac{z}{ct} = 1$ (t — перем. параметр).

433. Плоскостей: $xt^2 + yt^2 - z = 0$.

434. Плоскостей: $x \sin t - y \cos t - z = at$.

435. Плоскостей: $x(\sin t - \cos t) - y(\sin t + \cos t) + 2z = ct$.

436. Плоскостей: $x(ts \sin t - 2 \cos t) - y(ts \cos t + 2 \sin t) - z(2 + t^2) = t^4$.

437. Доказать, что для системы огибаемых плоскостей $x = \eta \varphi(t)$, $y = \zeta \psi(t)$, $z = \omega(t)$ характеристики представляют систему касательных к некоторой кривой (ребро возврата развертывающейся поверхности).

438—440. Найти огибающую поверхность для сфер постоянного радиуса R , центр которых перемещается по одной из следующих кривых:

438. $y^2 = 2px$, $z = 0$. **439.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$. **440.** $xy = a^2$, $z = 0$.

441—443. Найти огибающую поверхность для эллипсоидов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ при одном из условий:

441. $a^2 + b^2 + c^2 = l^2$. **442.** $a + b + c = l$. **443.** $a^2 + b^2 + c^2 = l^2$

(l — данная постоянная).

444–445. Найти отгибающую поверхность для параболоидов $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = z$ (p, q, c положительные переменные параметры) при одном из условий:

444. $c = p + q$

445. $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

446. Найти поверхность, касательные плоскости которой отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна и равна a .

447. Найти поверхность, касательные плоскости которой отсекают на осях координат отрезки, сумма квадратов которых постоянна и равна a^2 .

448. Найти поверхность, касательные плоскости которой отсекают от координатного угла тетраэдр постоянного объема a^3 .

449. Найти точки закругления поверхности $2x^2 + 3y^2 = 2z$.

450. Найти точки закругления поверхности $xy^2 = a''$.

451. Найти точки закругления поверхности $\sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$.

452–456. Найти главные радиусы кривизны следующих поверхностей:

452. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2z = 3$ в точке $(1, 1, 0)$.

453. $z = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

454. $x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{z}{a} \right)$.

455. $z^2 = 2xy$.

456. $cx = ay$.

ОТДЕЛ IV.

Геометрические приложения интегрального исчисления.

Простые интегралы.

Вычислить длину дуги следующих кривых:

1. Эволюты параболы $y^2 = \frac{8}{27p} (x - p)^3$ от точки $(p, 0)$ до точки пересечения с параболой $y^2 = 2px$.

2. Параболы $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ между точками $(a, 0)$, $(0, b)$.

3. Замкнутой части кривой $x = 3at^2$, $y = at (3 - t^4)$.
4. Кривой $x = 2a \sqrt{5 - t^4}$, $y = at (9 - 4t^4)$ между точками $(0, 0)$, $(6a \sqrt{15}, 0)$.
5. Замкнутой части кривой $x = a \sqrt{14 t^4}$, $y = at (8 - t^6)$.
6. Кривой $x = 6at^6$, $y = 5at (1 - t^8)$ между точками $(0, 0)$, $(6a, 0)$.
7. Кривой $x = 2a \operatorname{sh}^4 t$, $y = 3a \operatorname{ch} t$ от точки $(0, 3a)$ до (x, y) .
8. Части кривой $x = 8at^4$, $y = 3a (2t^2 - t^4)$, лежащей над осью x .
9. Замкнутой части кривой $x = 15at^4$, $y = 2a (5t^3 - 3t^6)$.
10. Кривой $x = 3at^6$, $y = a (3t^8 - t^9)$ между точками $(0, 0)$, $(9a, 0)$.
11. Кривой $x = a \cos t$, $y = -2a \log \sin t$ от точки $(0, 0)$.
12. Петли, образованной пересечением парабол $y^2 = 4ax$, $x^2 = \frac{1}{2} ay$.
13. Полного обвода кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
14. Полного обвода кривой $x^{2/5} + y^{2/5} = a^{2/5}$.
15. Полного обвода кривой $x = \frac{a}{2} \sin t (1 + 2 \cos^3 t)$, $y = a \cos^3 t$.
16. Полного обвода эпициклоиды с n петлями:

$$x = \frac{R}{n} \left[(n+1) \cos t - \cos (n+1)t \right], \quad y = \frac{R}{n} \left[(n+1) \sin t - \sin (n+1)t \right].$$
17. Полного обвода гипоциклоиды с n петлями:

$$x = \frac{R}{n} \left[(n-1) \cos t + \cos (n-1)t \right], \quad y = \frac{R}{n} \left[(n-1) \sin t - \sin (n-1)t \right].$$
18. Трактриссы $x = a \left(\cos t + \log \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$, $y = a \sin t$ от $(0, a)$ до (x, y) .
19. Полного обвода кривой 88 отд. III.
20. Кривой 89 отд. III между точками $(0, 2a)$, $\left(\frac{3}{2}\pi a, 0\right)$.
21. Полного обвода кривой 90 отд. III.
22. Кривой 91 отд. III между точками $(0, 2a)$, (x, y) .
23. Кривой 92 отд. III между точками $(0, 2a)$, (x, y) .

24. Кривой 93 отд. III между точками (a, a) , (x, y) .

25. Циссоиды $x = 2a \sin^2 t$, $y = 2a \cdot \frac{\sin^3 t}{\cos t}$ между точками $(0, 0)$, (x, y) .

26. Кривой $(x+y)^{2/3} - (x-y)^{2/3} = a^{2/3}$ между точками (x_1, y_1) , (x_2, y_2) .

27. Кривой $x = \sin t \cdot f'(t) + \cos t \cdot f''(t)$, $y = \cos t \cdot f'(t) - \sin t \cdot f''(t)$ между точками $t = t_0$ и $t = t_1$.

28. Заменутой части кривой: $r = a (\theta^2 - 1)$.

29. Полного обвода кривой: $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$.

30. Полного обвода кривой: $r = a \sin^4 \frac{\theta}{4}$.

31. Кривой: $r = a \sec u$, $\theta = \operatorname{tg} u - u$ от точки $(a, 0)$ (т. о. $r = a$, $\theta = 0$).

32. Кривой: $r = a \cos^3 u$, $\theta = 2(u - \operatorname{tg} u)$ от точки $(a, 0)$.

33. Кривой: $r = a (\sin u + \cos u)$, $\theta = u - \log(1 + \operatorname{tg} u)$ от точки $(a, 0)$.

34. Кривой: $r = a \sec^3 u$, $\theta = 2(\operatorname{tg} u - u)$ от точки $(a, 0)$.

35. Кривой: $r = a \sin u \cos u$, $\theta = 2u - \operatorname{tg} u$ от точки $(0, 0)$.

36. Кривой: $r = a (1 - \operatorname{tg} u)$, $\theta = \operatorname{tg} u - \log(1 + \operatorname{tg} u)$ от точки $(a, 0)$.

37. Кривой: $r = \frac{a}{1 + \cos u}$, $\theta = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) - u$ от точки $\left(\frac{a}{2}, 0 \right)$.

38. Кривой в пространстве: $y = \frac{1}{4k+2} \cdot \frac{x^{2k+1}}{a^{2k}}$, $z = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{x^{k+1}}{a^k}$ от точки $(0, 0, 0)$.

39. Кривой: $y = \frac{1}{4} (x + \sin x \cos x)$, $z = \sin x$ от точки $(0, 0, 0)$.

40. Кривой: $y = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$, $z = \log x$ от точки $(1, 0, 0)$.

41. Кривой: $x = \log(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)$, $y = \operatorname{ch} t - 1$, $z = \operatorname{sh} t$ от точки $(0, 0, 0)$.

42. Кривой : $x = \log \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t - \operatorname{arctgsh} t$, $z = \operatorname{ch} t$ от точки $(0, 0, 1)$.

43. Сферической спирали : $x = \frac{a \cos t}{\operatorname{ch} t}$, $y = \frac{a \sin t}{\operatorname{ch} t}$, $z = th t$ (на плоск. XOY проектируется в виде спирали $r = \frac{a}{\operatorname{ch} \theta}$) от нижнего полюса сферы до верхнего.

См. также задачи 357 366 отдела III.

Найти координаты центра инерции однородной дуги для следующих линий:

44. Окружности $x^2 + y^2 = R^2$ между точками $(R, 0)$, $(0, R)$.

45. Полного обвода циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

46. Астроиды $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ между точками $(a, 0)$, $(0, a)$.

47. Полного обвода кардиоиды $r = a(1 + \cos \theta)$.

48. Вантавой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = kt$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

Вычислить площади, ограниченные следующими линиями:

49. $y = x^2 e^{-x}$, $y = 0$, при $x > 0$.

50. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, $y = 0$, между 2 точками прикосновения кривой к оси x .

51. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, $y = 0$, между 2 последовательными точками пересечения кривой с осью x .

52. $y = x^3 e^{-\frac{3}{2}x}$, $y = 0$ (асимптота).

53. $y^2 = x^3 - x^4$. 54. $x^3 = a(x - y^2)$, $y = 0$.

55. Площадь петли кривой $x^6 = a(x^2 - y^2)$.

56. $x^4 = a(x^3 - y^3)$, $y = 0$. 57. $y^2 = 2px$, $y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3$, $y = 0$.

58. Площадь между эллипсом $x^2 + 2y^2 = 2a^2$ и его эволютой.

59. $x^3 + y^3 = a^3$, $y^3 = a(a - x)$.

60. $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$, $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y}{b} = 1$.

61. $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2ay$.

62. $y^2 + 2ax = a^2$, $y^2 - 2bx = b^2$ ($a > 0$, $b > 0$).

$$63. \quad x^2 + 4y^2 = 8a^2, \quad x^2 - 3y^2 = a^2 \quad (x > 0).$$

$$64. \quad y^2 = 4ax, \quad x^2 = \frac{1}{2} ay.$$

$$65. \quad x^2 + y^2 = 2a^2, \quad y^3 = ax, \quad y = 0. \quad 66. \quad y^3 (x^2 + a^2) = a^2 x^3, \quad y = \pm a.$$

$$67. \quad (y - x)^2 = a^2 - x^2. \quad 68. \quad x^4 = a^2 x^2 - b^2 y^2.$$

$$69. \quad \text{Площадь петли кривой: } a^2 y^4 = x^4 (a^2 - x^2).$$

$$70. \quad \text{Площадь петли кривой: } y^2 (a^2 + x^2) = x^2 (a^2 - x^2).$$

$$71. \quad \text{Площадь петли кривой: } 16a^4 y^4 = b^2 x^2 (a - 2x).$$

$$72. \quad \text{Площадь замкнутой части кривой: } 2y^2 (a^2 + x^2) = (a^2 - x^2)^2.$$

$$73. \quad 2y (a^2 + x^2) - 4ay (a^2 - x^2) + (a^2 - x^2)^2 = 0.$$

$$74. \quad \text{Площадь между трактриссой } x = a \left(\cos t + \log \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), \\ y = a \sin t \text{ и осью } x.$$

$$75. \quad xy^2 = 4a^3 (2a - x), \quad x = 0.$$

$$76. \quad \text{Площадь петли кривой } y (a - x) = x^2 (a + x), \text{ а также} \\ \text{площадь между кривою и ее асимптотой } x = a.$$

$$77. \quad \text{Площадь, ограниченную кривою 16 отд. IV.}$$

$$78. \quad \text{Площадь, ограниченную кривою 17 отд. IV.}$$

$$79. \quad \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

$$80. \quad \sqrt[n]{\frac{x}{a}} + \sqrt[n]{\frac{y}{b}} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

$$81. \quad \sqrt[2n+1]{\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \sqrt[2n+1]{\left(\frac{y}{b}\right)^2} = 1.$$

$$82. \quad \sqrt[k]{\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \sqrt[l]{\left(\frac{y}{b}\right)^2} = 1 \quad (k, l \text{ нечетные}).$$

$$83. \quad x^2 + y^4 = ax, \quad x^2 + y^2 = by \quad (a > 0, \quad b > 0).$$

$$84. \quad x^4 + y^4 = 4ax^3.$$

$$85. \quad (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy.$$

$$86. \quad x^4 + y^4 = 2a^2 xy.$$

$$87. \quad x^4 + y^4 = 4ax^2 y.$$

$$88. \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$

$$89. \quad (x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2.$$

$$90. \quad x^4 + y^4 = axy^2.$$

$$91. \quad x^4 + y^4 = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$

$$92. \quad x^6 + y^6 = 6ax^4 y.$$

$$93. \quad x^6 + y^6 = a^2 x^4 + b^2 y^4.$$

$$94. \quad x^{2n} + y^{2n} = a^2 x^{2n-2} + b^2 y^{2n-2}.$$

$$95. \quad x^{2n} + y^{2n} = a^2 (xy)^{n-1}.$$

$$96. \quad (x^2 + y^2)^2 = a (x^2 + y^2).$$

97. Площадь петли кривой $x^4 = axy^3 + ay^4$.

98. Площадь петли кривой $x^4 = axy - ay^2$.

99. Площадь петли кривой $x^4 = ax^2y - ay^4$.

100. Площадь петли кривой $x^4 - y^4 = 3axy$.

101. $y^3 + y^2 = ay^2$, $x = 0$.

102. Площадь петли кривой $x^2y + y^3 + ax^2 - axy = 0$.

103. $x^4 + y^4 - 2ay^3 + 2ax^2y = 0$.

104. Найти две части, на которые площадь лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x - y)$ делится окружностью $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2$.

105. $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ (полная площадь).

106. Площадь между кривою $r = a(\sec \theta + \tan \theta)$, ее асимптотой $r \cos \theta = 2a$ и полярною осью.

107. $r = a(\cos 2\theta + \sin 2\theta)$ (полная площадь).

108. Площадь петли кривой $r^3 = a^2 \frac{\sin 3\theta}{\cos \theta}$.

109. Площадь петли кривой $r = b + a \sec \theta$ при $a < b$ (см. 348 III).

110. Для эллипса Паскаля $r = b + a \cos \theta$ при $a > b$ (см. 347 III) найти площадь внутреннего завитка и площадь между внутренним завитком и внешним обводом.

111. Полная площадь кривой $r = b + a \cos \theta$ при $a < b$.

112. Для кривой $r = \frac{a \cos 2\theta}{\cos \theta}$ найти площадь завитка и площадь между кривой и ее асимптотой.

113. Площадь между кривою $r = 2a \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta}$ и ее асимптотой.

114. Для кривой $r = a \tan \frac{\theta}{2}$ найти площадь завитка и площадь между кривой и ее асимптотой.

В задачах 115—132 знаками V_x, V_y обозначены объемы вращения данных кривых около осей x и y , значками S_x, S_y поверхности вращения около осей x и y .

115. $x^4 + y^4 = a^2x^2$. . . V_x . 116. $x^4 + y^4 = ar^3$. . . V_y .

117. $x = a \sin^3 t, y = a \cos^3 t$. . . V_x, S_x .

118. $x = a \left(\cos t - \log \tan \frac{t}{2} \right), y = a \sin t$. . . V_y, S_y .

119. $r = 2a \sin^2 t, y = 2a \cot t$. . . V_y .

$$120. x = 2a \sin t, y = a \sin t \cos t \dots V_x, S_x.$$

$$121. x = at^2, y = \frac{1}{3}at (3 - t^3) \text{ между точками } (0, 0), (3a, 0) \dots V_x, S_x, V_y, S_y.$$

$$122. x = \frac{9}{5}at^4, y = \frac{6}{25}a (5t^3 - 3t^5) \text{ между точками } (0, 0), (5a, 0) \dots S_x, S_y.$$

$$123. x = 2at^3, y = \frac{3}{4}a (2t^2 - t^4) \text{ между точками } (0, 0), (4a\sqrt{2}, 0) \dots S_x, S_y.$$

$$124. r^2 = a^2 \cos 2\theta \dots V_x, V_y, S_x.$$

$$125. r = a (1 + \cos \theta) \dots V_x, S_x.$$

$$126. r^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta (a > b) \dots V_x, S_x, V_y, S_y.$$

$$127. (y^2 - b^2)^2 = ax^3 \text{ между точками } (0, b) \text{ и } (0, -b) \dots V_y.$$

$$128. x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \dots V_y, S_y.$$

$$129. x = a(t + \sin t), y = a(1 + \cos t) \dots V_y, S_y.$$

$$130. \text{Объем и поверхность вращения циклоиды } r = a(t + \sin t), y = a(1 - \cos t) \text{ около касательной в ее вершине } (0, 0).$$

$$131. \text{Объем вращения циссоиды } x = 2a \sin^2 t, y = \frac{2a \sin^3 t}{\cos t} \text{ около ее асимптоты } x = 2a.$$

$$132. \text{Для сегмента, отсеченного от параболы } y^2 = 2px \text{ хордой } x = \frac{p}{2}, \text{ найти } V_x, S_x, V_y, S_y.$$

Вычислить (по площадям параллельных сечений) **объемы**, **ограниченные** данными поверхностями:

$$133. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

$$134. z^2 = 2px, y = 0, y = x, x = a, z = 0.$$

$$135. z^2 = 2px, z^2 = 2qy, x = 0, y = 0, z = a.$$

$$136. z^2 = 2px, y^2 = 2q(a - x).$$

$$137. z^2 = 2px, x^2 + y^2 = 2Rx.$$

$$138. x^2 + z^2 = 2ax, y = 0, y = ax, z = a.$$

$$139. x^2 + z^2 = 2ax, y^2 + z^2 = 2ay, x = 0, y = 0, z = a \sin \alpha$$

$$140. x^2 + y^2 = az, x^2 + y^2 = R^2, z = 0.$$

$$141. x^2 + y^2 = 2ax, z = \alpha_1 x, z = \alpha_2 x (\alpha_1 > \alpha_2).$$

$$142. x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2, x^2 + y^2 = 2az.$$

$$143. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = a \quad (a > 2z).$$

$$144. x^2 + y^2 + z^2 = 2cz, x^2 + y^2 = 2az \quad (c > a).$$

$$145. x^2 + y^2 = a(s - a), x^2 + y^2 = \frac{3}{16}z^2$$

$$146. x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z^2, x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2.$$

$$147. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z > 0.$$

$$148. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \frac{z}{c}.$$

$$149. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \frac{z}{c}, \frac{x}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

$$150. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, 2z = c.$$

$$151. \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1 \quad \text{полный объем}$$

$$152. \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

Двойные интегралы.

153. Вычислить объемы 133—139 при помощи двойных интегралов в прямоугольной системе координат.

Вычислить помощью двойных интегралов объемы, ограниченные данными поверхностями:

$$154. z = c \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y}, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$155. cz = xy, x = 0, x = a, y = 0, y = b.$$

$$156. z^2 = xy, x = a, y = b, z = 0.$$

$$157. (x - a)^2 + y^2 = R^2, y + z = R, z = 0.$$

$$158. x^2 + y^2 = R^2, x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (a \geq R\sqrt{2}).$$

$$159. x + y + z = a, 3x + y = a, \frac{3}{2}x + y = a, y = 0, z = 0.$$

$$160. x + y + z = 2a, x + 2y = 2a, x + y = a, y = 2x, y = x, z = 0.$$

$$161. x^2 z^2 + a^2 y^2 = c^2 x^2, x = 0, x = a.$$

$$162. \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = \frac{b}{a}x, y = 0, z = 0.$$

$$163. x^2 + (z + c)^2 = a^2 \quad a > c, \quad y = ax, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$164. y^2 + z^2 = 2cx, \quad x = a, \quad y = \sqrt{\frac{2c}{a}}x, \quad z = 0.$$

$$165. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$166. (x \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 + y^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

$$167. z = c \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (\text{объем одного возвышения над плоскостью } z = 0).$$

$$168. z = c \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) \quad (\text{объем одного возвышения над плоскостью } z = 0).$$

$$169. z = c \left[\sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right], \quad x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b, \quad z = 0.$$

$$170. z = \frac{c}{ch \left(\frac{x}{a} \right) ch \left(\frac{y}{b} \right)}, \quad z = 0.$$

$$171. z = \frac{c}{ch \left(\frac{x}{a} \right) ch \left(\frac{y}{b} \right)}, \quad z = 0.$$

$$172. z = \frac{c^5}{(x^2 + a^2)(y^2 + b^2)}, \quad z = 0.$$

$$173. z = \sqrt{\frac{c^2}{a^2 + x^2} \cdot \frac{1}{b^2 + y^2}}, \quad x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b, \quad z = 0.$$

$$174. z = \frac{c^{k+l+1}}{a^k(y+b)}, \quad (l > 1, l > 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0).$$

$$175. z = c - (x^2 + y^2)(x + y), \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$176. z = xye - (x^4 + y^4), \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$177. z = (x^2 + y^2)c - (x^4 + y^4), \quad z = 0.$$

178–181. Переменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

$$178. \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy dx. \quad 179. \int_0^1 \int_{\sqrt{2-4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

$$180. \int_0^1 \int_{\frac{1-x}{2}}^{\sqrt{1-x}} f(x, y) dy dx. \quad 181. \int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

182 185. Вычислить моменты инерции следующих однородных плоских фигур, при массе фигуры $= M$:

182. треугольника с высотой h относительно его основания;

183. параболического сегмента $y^2 = 2px$, отсеченного главной хордой длины $2h$, относительно оси параболы;

184. параболического сегмента, отсеченного главной хордой, при длине отрезка оси h относительно главной хорды;

185. площади циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ относительно ее основания (ось x).

186 188. Вычислить координаты центра инерции однородных плоских фигур:

186. параболического сегмента $(y^2 = 2px)$, отсеченного осью параболы и главной хордой, проведенною через точку (x, y) ;

187. сегмента астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, ограниченного осями координат;

188. сегмента циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, ограниченного прямыми $y = 0$, $x = \pi a$.

189. Решить задачи 140—146 при помощи двойных интегралов в полярной системе координат ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$).

190 205. Вычислить объемы, ограниченные следующими поверхностями:

190. $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$.

191. $x^2 - y^2 = Rx$, $ax + by + cz = 0$, $a_1x + by + cz = 0$ ($a_1 > a$).

192. $cz = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

193. $cz = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$.

194. $az = x^2 + y^2$, $x + z = 2a$.

195. $cz = xy$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$, $y > 0$, $x > 0$.

196. $cz = x^2 + y^2$, $x^4 + y^4 = a^4(x^2 + y^2)$, $z = 0$.

197. $z^2 = 2xy$, $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $z = 0$, $y > 0$, $x > 0$.

198. $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, $x^2 + y^2 = ar$ при $z > 0$.

199. $z^2 = \frac{2axy}{x^2 + y^2} - x^2 - y^2$ (полный объем).

200. $y^2 + z^2 = 4a(x + a)$, $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ ($c > a$).

201. $z = a - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = a$, $x = 0$.

202. $z = a \cdot \arctg \frac{y}{x}$, $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $z = 0$.

203. $z = c + \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.

204. $x^2 z^2 + a^2 y^2 = z^2 (a^2 - z^2)$ (полный объем).

205. $cz = x^4 + y^4$, $(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2 y^2$, $z = 0$.

206. Остаточный объем сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, если отнять части, вырезаемые цилиндрами с основаниями $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $r^2 = -a^2 \cos 2\theta$.

207. Остаточный объем сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, если отнять части, вырезаемые цилиндрами с основаниями: $r^2 = a^2 \cos 4\theta$, $r^2 = -a^2 \cos 4\theta$.

208. Даны поверхности $2cz = y^2 - x^2 + 2xycot\alpha$ ($0 < \alpha < \pi$), $x^2 + y^2 = R^2$. Найти 1) ту часть объема, которая расположена над плоскостью XOY , 2) ту часть объема, которая расположена внутри угла положит. координат.

Вычислить моменты инерции однородных плоских фигур, при массе фигур $= M$:

209. площади круга $x^2 + y^2 = R^2$ относит. одного из диаметров;

210. площади кардиоиды $r = a(1 + \cos\theta)$ относ. полярной оси;

211. площади лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ относ. полярной оси.

Вычислить координаты центра инерции однородных плоских фигур:

212. площади кругового квадранта при радиусе R ;

213. площади кругового сектора при радиусе R и центральном угле α ;

214. площади, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\theta)$ и полярною осью;

215. площади лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, лежащей внутри угла положит. координат;

216. площади петли Декартова Листа $x^3 + y^3 = 3axy$.

217. Вычислить объемы в зад. 147—150 помощью двойных интегралов в системе координат $x = ar \cos \phi$, $y = br \sin \phi$.

Определить площади, ограниченные следующими линиями:

218. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2}$

219. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$

220. $\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^4}{h^4} + \frac{y^4}{k^4}$

221. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$

222. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^3}{h^3} + \frac{y^3}{k^3}$

223. Петля кривой $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{3xy}{c^2}$.

$$224. \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{xy}{c^2}.$$

$$225. \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^3}{c^3}.$$

$$226. \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}.$$

$$227. \frac{x^6}{a^6} + \frac{y^6}{b^6} = \frac{x^4}{h^4} + \frac{y^4}{k^4}.$$

$$228. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 - 2 \frac{x}{a} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

$$229. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^3 = \frac{x^4 y}{c^3}.$$

$$230. \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2 y}{c^3}.$$

$$231. x^4 = bxy^2 + ay^3 \text{ (плоск. петли)}.$$

$$232. cx^3 = (bx - ay)^2, y = 0. \quad 233. x^3 = bxy - ay^2 \text{ (петля)}.$$

$$234. \frac{x^5}{a^5} + \frac{y^5}{b^5} = \frac{y^2}{c^2}, x = 0. \quad 235. \frac{x^3}{a^3} - \frac{y^3}{b^3} = \frac{xy}{c^2} \text{ (петля)}.$$

$$236. cx \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = y^2, x = \frac{b^2}{c}.$$

$$237. x^3 = bx^2 - ay^2 \text{ (петля)}.$$

$$238. (bx^2 + ay^2)^3 = 4c^3 x^2 y^2.$$

$$240. x^4 = bx^3 - ay^3, y = 0.$$

$$242. bx^6 + ay^6 = 6c^2 x^4 y.$$

$$244. bx^{2n} + ay^{2n} = c^2 (xy)^{n-1}.$$

$$239. x^4 = bx^2 y - ay^3 \text{ (петля)}.$$

$$241. bx^4 + ay^4 = c^2 xy^2.$$

$$243. bx^{2n} + ay^{2n} = c^2 x^{2n-2} + d^2 y^{2n-2}.$$

Вычислить объемы, ограниченные следующими поверхностями:

$$245. \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^{2n} = 1 \text{ (} n \text{ целое полож.)}.$$

$$246. \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0.$$

$$247. cz = xy, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0, y > 0, x > 0.$$

$$248. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$249. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^k + \frac{z^2}{c^2} = 1, z = 0 \text{ (} k > 0 \text{)}.$$

$$250. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h}, z = 0.$$

$$251. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{z}{h}, \quad z = 0$$

$$252. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = 0.$$

$$253. z^2 = 2xy, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{2xy}{c^2}, \quad z = 0, \quad y > 0, \quad x > 0.$$

$$254. \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{4xy}{c^2}, \quad z = 0.$$

$$255. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 2.$$

$$256. cz - xy, \quad \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}, \quad z = 0, \quad y > 0, \quad x > 0.$$

$$257. 2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z \geq 0.$$

$$258. z = c \cdot e^{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}, \quad z = 0.$$

$$259. z = c \cdot \sin \pi \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (\text{объемы последовательных колец,$$

образуемых над плоскостью XOY).

$$260. z = c \sin \pi \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad (\text{см. 259}).$$

$$261. z = \frac{c}{h^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}, \quad z = 0.$$

$$262. \frac{z}{c} = \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{y}{h}, \quad z = 0.$$

$$263. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0, \quad y = kx.$$

$$264. \frac{y^2}{b^2} = \left(1 - \frac{z}{c} \right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$265. \text{Остающийся объем эллипсоида } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ если от-}$$

нять части, вырезаемые цилиндрами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x}{a} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x}{a} = 0.$$

266. Остаточный объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, если отнять части, вырезаемые цилиндрами

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}.$$

267. Момент инерции однородной эллиптической пластинки с полуосями a , b и массой M относительно большой и малой оси.

Определять центры инерции следующих однородных плоских фигур:

268. Квадранта эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ между положит. осями координат.

269. Петли кривой $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2 y}{c^2}$ между полож. осями координат.

270. Петли кривой $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3 = \frac{x^4 y}{c^5}$ между полож. осями координат.

Вычислять площади, ограниченные следующими линиями (все параметры в уравнениях считаются положительными):

$$271. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$272. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x^2}{h^2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$273. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$274. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$275. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x^2}{h^2}, \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{y^2}{k^2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$276. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2 y}{c^3}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$277. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$278. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^3}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$279. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^5 = \frac{x^5 y^5}{c^5}, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$280. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^5 = \frac{x^3}{h^3} - \frac{y^3}{k^3}, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$281. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^5 = \frac{x^3}{h^3} + \frac{y^3}{k^3}, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$282. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^n = \frac{x^{n-2}}{h^{n-2}} + \frac{y^{n-2}}{k^{n-2}}, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$283. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^{2n+1} = \left(\frac{xy}{c^2} \right)^n, x \geq 0, y \geq 0.$$

Вычислить объемы, ограниченные следующими поверхностями:

$$284. z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$285. z^2 = xy, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 3, \\ \frac{x}{a} - 3 \frac{y}{b} = 0, 3 \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, z = 0.$$

$$286. \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} = 1, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$287. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$288. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^k + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (k > 0).$$

$$289. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^k + \left(\frac{z}{c} \right)^k = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (k > 0).$$

$$290. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$291. cz = xy, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = \frac{xy}{ab}, z = 0, y > 0, x > 0.$$

$$292. z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^{10} = \frac{xy}{c^2}, z = 0, y > 0, x > 0.$$

$$293. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = \frac{x}{a}, z = 0, y = 0.$$

$$294. z^2 = xy, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{y^2}{b^2}, z=0, y>0, x>0.$$

$$295. \frac{z}{c} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}, z=0, y=0, x>0.$$

296. $z = c \cdot \sin \pi \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), x=0, y=0, z=0$ (объемы последовательных параллельных трубок, лежащих внутри угла положит. координат).

$$297. z = c \cdot \sin \left[\pi \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 \right], x=0, y=0, z=0 \text{ (см. 296)}.$$

$$298. z = c \log \frac{1}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, x=0, y=0, z=0.$$

$$299. z = c \cdot e^{-\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2}, x=0, y=0, z=0.$$

300. Найти центр инерции однородной площадки, ограниченной прямыми $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, 3 \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

301. Найти центр инерции площади петли кривой $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{xy}{ab}$, лежащей внутри угла полож. координат.

$$302. \text{Площадь: } \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1, \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 2, \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, 3 \sqrt[3]{\frac{x}{a}} = \frac{y}{b}, x>0, y>0.$$

$$303. \text{Площадь: } \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^2 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}.$$

$$304. \text{Площадь петли. } \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^2 = \frac{xy}{c^2}.$$

$$305. \text{Объем: } \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^3 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

$$306. \text{Объем: } \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^3 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

$$307. \text{Объем: } \left[\left(\frac{x}{a} \right)^k + \left(\frac{y}{b} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} + \left(\frac{z}{c} \right)^{2k} = 1, k > 0.$$

$$308. \text{Объем: } z^3 = cxy, \left[\left(\frac{x}{a} \right)^4 + \left(\frac{y}{b} \right)^4 \right]^{\frac{1}{4}} = \frac{xy}{h^2}, z = 0, y > 0, x > 0.$$

$$309. \text{Объем: } z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, \left(\frac{x}{a} \right)^4 + \left(\frac{y}{b} \right)^4 = 1, z = 0.$$

$$310. \text{Объем: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x}{a} \right)^4 + \left(\frac{y}{b} \right)^4 = 1.$$

$$311. \text{Какую часть объема, ограниченного поверхностью } \left(\frac{x}{a} \right)^4 + \left(\frac{y}{b} \right)^4 + \left(\frac{z}{c} \right)^4 = 1, \text{ отсекает плоскость } z = \frac{1}{8}c.$$

$$312. \text{Объемы последовательных колец, образуемых над плоскостью } XOY \text{ поверхностью } z = c \cdot \sin \pi \left[\left(\frac{x}{a} \right)^{1/n} + \left(\frac{y}{b} \right)^{1/n} \right]^n.$$

$$313. \text{Площадь: } \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \\ \frac{x}{a} = 9 \frac{y}{b}.$$

$$314. \text{Площадь: } \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^2 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

$$315. \text{Площадь петли: } \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^{12} = \frac{xy}{c^2} \quad (x > 0, y > 0).$$

$$316. \text{Объем: } \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^8 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

$$317. \text{Объем: } \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^{2k} + \frac{z^2}{c} = 1 \quad (x > 0, y > 0, z > 0, \\ k > 0).$$

$$318. \text{Объем: } \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^4 + \left(\frac{z}{c} \right)^k = 1 \quad (x > 0, y > 0, z > 0, \\ k > 0),$$

$$319. \text{Объем: } z = ce \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^8 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z > 0).$$

В задачах 320—361 требуется определить площади и объемы, выбирая так систему координат, чтобы пределы интегрирования были постоянными по общим переменным интегрирования.

320. Площадь: $x - y = 0$, $x - 2y = 0$, $x + y = a$, $x + 3y = a$.

321. Объем: $z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$, $x = y$, $x = 3y$, $x + y = a$, $x + 2y = a$,
 $z = 0$.

322. Объем: $z = \frac{a^4}{y^6} (2x - a)^2$, $x = y$, $x = 2y$, $x = a$, $x + y = a$,
 $z = 0$.

323. Объем: $z = \frac{a^4}{y^3} \sin \left(\frac{\pi x}{y} \right)$, $x = 2y$, $x = 3y$, $x + y = a$,
 $x + 2y = a$, $z = 0$.

324. Площадь: $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ ($a > b > 0$,
 $\alpha > \beta > 0$).

325. Площадь: $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y = m$, $y = n$ ($a > b > 0$,
 $m > n > 0$), $x > 0$.

326. Объем: $z = \frac{x^3}{y^3} (x^2 + y^2)$, $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y = m$, $y = n$,
 $z = 0$, $x > 0$.

327. Площадь: $xy = a^2$, $xy = b^2$, $y = m$, $y = n$ ($a > b > 0$,
 $m > n > 0$).

328. Объем: $z = ye^{-\frac{xy}{a^2}}$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = m$, $y = n$, $z = 0$.

329. Площадь: $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $x = \alpha y$, $x = \beta y$ ($m > n > 0$,
 $\alpha > \beta > 0$).

330. Объем: $z^2 = xy$, $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $x = \alpha y$, $x = \beta y$, $z = 0$.

331. Объем: $cz = xy$, $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $x = \alpha y$, $x = \beta y$, $z = 0$.

332. Объем: $z = y \sin \left[\pi \left(\frac{x}{y} \right)^4 \right]$, $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $x = \alpha y$,
 $x = \beta y$, $z = 0$ ($m > n > 0$, $1 > \alpha > \beta > 0$).

333. Площадь: $xy = a^2$, $xy = b^2$, $x = \alpha y$, $x = \beta y$ ($\alpha > \beta > 0$).

334. Объем: $cz = xy$, $xy = a^2$, $xy = 4a^2$, $x = y$, $x = 9y$, $z = 0$
 (внутри угла полож. координат).

335. Объем: $z^2 = xy$, $xy = a^2$, $xy = 4a^2$, $x = 2y$, $x = 3y$, $z = 0$
 (внутри угла полож. координат).

336. Объем: $z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $x = 3y$,
 $z = 0$ (при $x > 0$, $y > 0$).
337. Объем: $z = c \sin \left(\frac{\pi xy}{4a^2} \right)$, $xy = a^2$, $xy = 4a^2$, $x = y$, $x = 2y$,
 $z = 0$ (при $x > 0$, $y > 0$).
338. Объем: $z = \frac{cx}{y} \sin \frac{\pi \sqrt{xy}}{2a}$, $xy = a^2$, $xy = 4a^2$, $x = 2y$,
 $x = 3y$, $z = 0$ (при $x > 0$, $y > 0$).
339. Площадь: $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $x^2 = my$, $x^2 = ny$ ($a > b > 0$,
 $m > n > 0$).
340. Объем: $cz = xy$, $y^2 = 2ax$, $y^2 = 3ax$, $x^2 = by$, $x^2 = 2by$, $z = 0$.
341. Объем: $z^2 = xy$, $y^2 = ax$, $y^2 = 4ax$, $x^2 = by$, $x^2 = 9by$, $z = 0$.
342. Объем: $z = \frac{y^3}{a^2} \sin \left(\frac{\pi xy}{4a^2} \right)$, $y^2 = 2ax$, $x^2 = 2ay$, $z = 0$.
343. Объем: $z = \frac{xy}{a} \sin \left[\frac{\pi(x^2 + y^2)}{4axy} \right]$, $y^2 = 2ax$, $x^2 = 2ay$, $z = 0$.
344. Площадь: $xy = a^2$, $xy = b^2$, $y^2 = mx$, $y^2 = nx$ ($a > b > 0$,
 $m > n > 0$).
345. Объем: $z^2 = xy$, $xy = a^2$, $xy = 4a^2$, $y^2 = bx$, $y^2 = 3bx$, $z = 0$.
346. Объем: $cz = xy$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y^2 = bx$, $y^2 = 2bx$, $z = 0$.
347. Объем: $z = \frac{y^3}{a^2} \sin \left(\frac{\pi x^2 y^2}{16a^4} \right)$, $xy = 2a^2$, $xy = 4a^2$, $y^2 = bx$,
 $y^2 = 2bx$, $z = 0$.
348. Площадь: $x^2 = a^2 y$, $x^2 = b^2 y$, $y^2 = c^2 x$, $y^2 = d^2 x$ ($a > b > 0$,
 $c > d > 0$), $x > 0$, $y > 0$.
349. Площадь: $y = \frac{x^k}{a^{k-1}}$, $y = \frac{x^k}{b^{k-1}}$, $x = \frac{y^k}{c^{k-1}}$, $x = \frac{y^k}{d^{k-1}}$ ($a > b > 0$,
 $c > d > 0$, $k^2 - 1 > 0$), $x > 0$, $y > 0$.
350. Площадь: $y = \frac{x^2}{a}$, $y = \frac{x^2}{b}$, $y^2 = \frac{x^3}{c}$, $y^2 = \frac{x^3}{d}$ ($a > b > 0$,
 $c > d > 0$).
351. Площадь: $y = \frac{x^2}{a^2}$, $y = \frac{x^2}{b^2}$, $y = \frac{x^2}{c}$, $y = \frac{x^2}{d}$ ($a > b > 0$,
 $c > d > 0$).

352. Площадь: $y = \frac{x^k}{a^{k-1}}, y = \frac{x^k}{b^{k-1}}, y = \frac{x^k}{c^{k-1}}, y = \frac{x^k}{d^{k-1}} \quad (a > b > 0,$
 $c > d > 0, k > 1, k^2 - 1 \geq 0, l^2 - 1 \geq 0), x > 0, y > 0.$

353. Площадь: $y = \frac{x^k}{a^{k-1}}, y = \frac{x^k}{b^{k-1}}, y = \alpha x, y = \beta x \quad (a > b > 0,$
 $\alpha > \beta > 0, k^2 - 1 \geq 0), x > 0, y > 0.$

354. Площадь: $y = \frac{x^k}{a^{k-1}}, y = \frac{x^k}{b^{k-1}}, xy = c^2, xy = d^2 \quad (a > b > 0,$
 $c > d > 0, k^2 - 1 \geq 0), x > 0, y > 0.$

355. Площадь: $y^2 + 2ax = a^2, y^2 + 2bx = b^2, y^2 - 2mx = m^2,$
 $y^2 - 2nx = n^2, y = 0 \quad (a > b > 0, m > n > 0).$

356. Объем: $c^2 z = x^2 y, y^2 + 2ax = a^2, y^2 - 2mx = m^2, y = 0, z = 0,$
 $(a > 0, m > 0).$

357. Площадь: $x^2 + y^2 = ay, x^2 + y^2 = by, x = \alpha y, x = \beta y$
 $(a > b > 0, \alpha > \beta > 0).$

358. Площадь: $x^2 + y^2 = ax, x^2 + y^2 = a_1 x, x^2 + y^2 = by,$
 $x^2 + y^2 = b_1 y \quad (a > a_1 > 0, b > b_1 > 0).$

359. Площадь: $\frac{x^2}{ch^2 u_0} + \frac{y^2}{sh^2 u_0} = c^2, \frac{x^2}{ch^2 u_1} + \frac{y^2}{sh^2 u_1} = c^2, \frac{x^2}{\cos^2 v_0}$
 $\frac{y^2}{\sin^2 v_0} = c^2, \frac{x^2}{\cos^2 v_1} - \frac{y^2}{\sin^2 v_1} = c^2 \quad (u_1 > u_0 > 0, v_1 > v_0 > 0)$ при
 $x > 0, y > 0.$

360. Площадь: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1, \frac{x^2}{m_1^2} -$
 $\frac{y^2}{n_1^2} = 1 \quad (a_1 > a, m_1 < m)$ при $a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2 = m^2 + n^2 =$
 $= m_1^2 + n_1^2 = c^2$ (постоянному) и при $x > 0, y > 0.$

361. Объем: $ks = xy, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1,$
 $\frac{x^2}{m_1^2} - \frac{y^2}{n_1^2} = 1, z = 0$ при $x > 0, y > 0, a_1 > a, n_1 > n, a^2 - b^2 = a_1^2 -$
 $- b_1^2 = m^2 + n^2 = m_1^2 + n_1^2 = c^2.$

362. Решить прим. 159 помощью системы коорд. $x = \frac{r-a}{u},$
 $y = v.$

$$363. \text{ Решить прим. 160 помощью системы коорд. } x = \frac{a}{u \cdot v}, \\ y = \frac{au}{u + v}.$$

Преобразовать следующие определенные интегралы, вводя новые переменные u и v :

$$364. \int_0^c \int_{ax}^{bx} f(x, y) dx dy, \quad u = x \cdot y, \quad uv = y.$$

$$365. \int_0^c \int_{cx}^{cx} f(x, y) dx dy, \quad ux = y, \quad vx = cx - y.$$

$$366. \int_0^a \int_{b\left(1-\frac{y}{a}\right)}^{cb} f(x, y) dx dy, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

$$367. \int_0^c \int_{ax}^{ay} f(x, y) dx dy, \quad x = uy, \quad a - x = ry.$$

$$368. \int_0^a \int_0^b f(x, y) dx dy, \quad u = y \cdot ax, \quad uv = y.$$

В задачах 369—411 требуется определить часть поверхности $f(x, y, z) = 0$, вырезаемую поверхностями $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ и пр., что для краткости обозначается так:

$$f(x, y, z) : \varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0, \text{ и пр.}$$

$$369. x^2 + y^2 + z^2 = a^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$370. x^2 + y^2 + z^2 = a^2 : x^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2 \quad (a < b).$$

$$371. x^2 + y^2 + z^2 = a^2 : y^2 = a(a + x), \quad x = 0.$$

$$372. x^2 + y^2 + z^2 = a^2 : x^3 + by^2 = a^2 x \quad (b \geq a).$$

$$373. y^2 + z^2 = x^2 : x^2 - y^2 = a^2, \quad y = +b, \quad y = -b.$$

$$374. y^2 + z^2 = x^2 : x^3 + y^2 = a^3.$$

$$375. y^2 + z^2 = x^2 : x^2 = ay.$$

$$376. y^2 + z^2 = x^2 : x^2 y^2 = a^2 (x^2 - y^2), \quad y = +a, \quad y = -a.$$

$$377. x^2 = 2c(c - z) : y = ax, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$378. x^2 + (z + c)^2 = a^2 \quad (a > c) : y = ax, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$379. \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 : x^4 = a^2 x^2 - c^2 y^2.$$

$$380. x^2 = 2c(c - z) : x^2 y^2 = a^2 x^3 - c^2 y^2, \quad z \geq 0.$$

$$381. x^2 = 2c(c - z) : y^2 - x^2 = c^2, \quad z \geq 0.$$

$$382. x^2 + (z + c)^2 = a^2 \ (a > c) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z \geq 0.$$

$$383. x^2 + (z + c)^2 = a^2 \ (a > c) : x^2 = a^2 - b^2 y^2, z > 0.$$

$$384. x^2 + z^2 = a^2 : y^2 = 2 px.$$

$$385. x^{3/2} + z^{3/2} = a^{3/2} : x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}.$$

$$386. x^{3/2} + z^{3/2} = a^{3/2} : by^3 = x^3.$$

$$387. z = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} : y = \frac{a}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}}, y = 0.$$

$$388. x^4 = az^2 : y^2 = a(4a - 9x^2).$$

$$389. z^2 = x^2 + a^2 : y^2(2x^2 - a) = a^2 x^2, x = a, x = -a.$$

$$390. z = a \log \frac{a^2}{a^2 - x^2} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$391. z = \frac{x^4}{a^2} : y = \frac{x^4}{a^2}, x = a, y = 0.$$

$$392. x^2 + z^2 = 2ax : y^2 = 2px.$$

$$393. z^2 = 2xy : x = a, y = b.$$

$$394. 2px - x^2 : y = ax, y = \beta x, x = a \ (\alpha > \beta > 0).$$

$$395. z^2 = 2px : y^2 = 2px, x = a.$$

$$396. \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \ (a > b) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1.$$

$$397. z^2 = 2xy : y^2 = 2px, x = a, z \geq 0.$$

$$398. z^2 = 2px : x^2 + y^2 = 2ax, z \geq 0.$$

$$399. z = c \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} : x^2 + y^2 = R^2, x = 0.$$

$$400. x^2 - y^2 = 2az : x^2 - y^2 + z^2 = 2cz \ (c > a).$$

$$401. 2cz = y^2 - x^2 : 2xy \cot \alpha : x^2 + y^2 = R^2, z \geq 0.$$

$$402. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{3/2} + \frac{z}{c} = 1 : z \geq 0.$$

$$403. x^2 - y^2 = 2az : (x^2 - y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

$$404. cz = xy : (x^2 + y^2)^2 = 2c^2 xy, z \geq 0.$$

$$405. x^2 + y^2 + z^2 = 2hz : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$406. x^2 + y^2 + z^2 = 2hz : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

$$407. (x^2 - y^2)^2 = c^2 z^4 : x^2 + y^2 = \frac{1}{16} c^2.$$

$$408. x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a} : x^2 + y^2 = 2 a^2.$$

$$409. x^2 + y^2 + z^2 = 2 cz : x^2 + y^2 = 2 az \ (c > a).$$

$$410. \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (c^2 > a^2) : x^2 + y^2 = R^2 \ (R < a).$$

$$411. \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (c^2 < a^2) : x^2 + y^2 = R^2 \ (R < a).$$

412. Полная поверхность тела, ограниченного сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 3 a^2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 2 az$.

413. Полная поверхность тела, ограниченного сферою $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ при $\alpha > 0$.

414. Остающаяся часть поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, если отнять части, вырезаемые цилиндрами: $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (y^2 - x^2)$.

415. Остающаяся часть поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, если отнять части, вырезаемые цилиндрами: $r^2 = a^2 \cos \theta$, $r^2 = -a^2 \cos \theta$.

416. Полная поверхность: $\rho = a \sin \theta f(\psi)$ (ρ, θ, ψ — сферические координаты, см. пр. 401 отд. III).

417. Полная поверхность: $\rho = a \sin \theta \sqrt{\cos 2\psi}$.

418. Полная поверхность: $\rho = a \sin \theta (1 + \cos \psi)$.

419. Полная поверхность: $\rho = \frac{a \sin \theta}{(\sin^2 \psi + \cos^2 \psi)^{1/2}}$.

420. Поверхность вращения кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \omega(t)$ около оси z .

421—428. Определить величину поверхности (относ. обозначений см. 369).

$$421. \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$422. \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z \geq 0.$$

$$423. \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

$$424. x^2 + y^2 + z^2 = R^2 : x - y = R, x \geq 0, y \geq 0.$$

$$425. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z}{c} = 1 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$426. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z}{c} = 1; x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$427. z = \left[\sqrt{\frac{x^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{y^2}{b^2}} \right]; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x = 0, y = 0.$$

$$428. x^{2/3} + y^{2/3} = z^{2/3}; z = c, z = 0.$$

429—431. Вычислить моменты инерции однородных поверхностей при массе поверхностей M :

429. Конуса $x^2 + y^2 = tg^2 \alpha \cdot z^2$ при радиусе основания R относительно оси конуса.

430. Сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ относ. одного из диаметров.

431. Параболоида $x^2 + y^2 = 2cz$, отсеченного плоскостью $z = c$, относ. оси z .

432—435. Определять координаты центра инерции однородных поверхностей:

$$432. x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$433. x^2 + y^2 = tg^2 \alpha \cdot z^2, z = H.$$

$$434. x^2 + y^2 = 2cz, z = c.$$

435. Сферического сегмента при радиусе основания r_0 и высоте h .

436. Вычислить интеграл $\iint \frac{dS}{P}$, распространенный по поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, где dS —элемент поверхности и P расстояние от начала координат до касательной плоскости к этому элементу.

437. Вычислить интеграл $\iint \frac{dS}{r^n}$, распространенный по поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, где dS элемент поверхности и r расстояние этого элемента до постоянной точки $(0, 0, c)$ ($c > a$).

438. Известно, что на кондукторе, имеющем форму эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и заряженном E единицами статического электричества, плотность электричества в точке $M(x, y, z)$, равна $\sigma = \frac{E \cdot P}{4\pi abc}$, где P расстояние от центра эллипсоида до касательной плоскости в точке M . Проверить, что полный заряд, представляющийся двойным интегралом $\iint \sigma dS$ (dS элемент поверхности), распространенным по всей поверхности эллипсоида, равен E .

439. Для эллипсоидального кондуктора $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ ($a > b$), заряженного E единицами статического электричества, найти потенциальную функцию в точках оси z : $A(0, 0, z)$, т. е. вычислить двойной интеграл $\iint \frac{\sigma dS}{r}$, распространенный по всей поверхности эллипсоида, причем σ означает плотность эл-ства (см. 438 зад.) на элементе dS и r расстояние этого элемента до точки A .

440. Тот же вопрос для эллипсоидального кондуктора $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ ($a > b$).

Тройные интегралы.

Вычислить при помощи тройных интегралов объемы, ограниченные следующими поверхностями (все параметры считаются положительными):

441. $x^2 \cdot y^2 + z^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$, $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \beta$ ($\alpha < \beta$).

442. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x$. **443.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 z$.

444. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$. **445.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2)$.

446. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 + z^2)$.

447. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 y^2 z^2$.

448. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 xyz$.

449. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2$.

450. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)$.

451. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 z(x^2 - y^2)$.

452. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 x^2 y^2$.

453. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = az(x^2 + y^2)^2$.

454. $(x^2 + y^2 + z^2)^4 = a^3 z(x^4 + y^4)$.

455. $(x^2 + y^2 + z^2)^n = a^3 z(x^{2n-4} + y^{2n-4})$.

456. $(x^2 + y^2 + z^2)^n = a^3 z^{2n-6}(x^6 + y^6)$.

457. $(x^2 + y^2)^3 + z^4 = a^3 x$.

458. $(x^2 + y^2)^3 + z^4 = a^3(y - x)$.

459. $(x^2 + y^2)^3 + z^4 = az(x^2 + y^2)$.

460. $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3 z$.

461. $[(x^2 + y^2)^2 + z^4]^2 = a^4 z(x^2 + y^2)^2$.

462. $[(x^2 + y^2)^2 + z^4]^3 = a^4 x^2 y^2 z^2$.

463. $(x^2 + y^2)^3 + z^6 = a^3 xyz$.

464. $[(x^2 + y^2)^3 + z^6]^2 = a^6(x^2 + y^2)^4$.

$$465. (x^2 + y^2)^n + z^{2n} = a^2 z^{2n-2}.$$

$$466. (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - a^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - a^2).$$

$$467. (x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

$$468. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 z e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}}.$$

$$469. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{a^2}{r^2} y. \quad 470. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 y.$$

$$471. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 \sin^2 \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right).$$

$$472. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 e^{-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$473. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$474. \rho = a \sin \psi (1 - \cos \psi), \quad (101 \text{ III}).$$

$$475. \rho = a \sin \psi (1 + \sin \psi).$$

$$476. \rho = \sin \psi (a \sin \psi + b \cos \psi).$$

$$477. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 3 \frac{z^2}{c^2}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3} \frac{y}{b}, \quad z = 0.$$

$$478. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h}.$$

$$479. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{z}{h}.$$

$$480. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x y}{h^2}.$$

$$481. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

$$482. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{z}{h} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right).$$

$$483. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^3 = \frac{z^4}{h^4}.$$

$$484. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^3 = \frac{x^2 z}{h^4}.$$

$$485. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^4 = \frac{y}{h^4}.$$

$$486. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^4 = \frac{x^4}{h^4} + \frac{y}{h^4}.$$

$$487. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^3 = \frac{x y}{h^3}.$$

$$488. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2zx}{ca}.$$

$$489. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^4 = \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} + \frac{4x^3y}{a^4b} + \frac{4x^3z}{a^4c} + \frac{4y^3x}{b^4a} + \frac{4y^3z}{b^4c} + \frac{4z^3x}{c^4a} + \frac{4z^3y}{c^4b} + \frac{6x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{6x^2z^2}{a^2c^2} + \frac{6y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{12x^2yz}{a^2bc} + \frac{12xy^2z}{ab^2c} + \frac{12xyz^2}{abc^2}.$$

$$490. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2zx}{ca}.$$

$$492. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2zx}{ca}.$$

$$493. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2zx}{ca}.$$

$$494. \left[\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right]^2 = \frac{4}{a^2b^2c^2} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2.$$

$$495. \left[\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right]^2 = \frac{4}{a^2b^2c^2} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2.$$

$$496. \left[\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right]^2 = \frac{4}{a^2b^2c^2} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2.$$

$$497. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2zx}{ca}.$$

$$498. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2zx}{ca}.$$

$$499. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2zx}{ca}.$$

$$500. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^n = \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} + \frac{n}{a^{n-1}b} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^{n-1}.$$

$$501. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \alpha \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2zx}{ca} + 2\alpha \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) + \alpha^2, \alpha < 1.$$

$$502. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \alpha \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2zx}{ca} + 2\alpha \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) + \alpha^2, \alpha < 1.$$

$$503. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2zx}{ca}.$$

$$504. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2zx}{ca}.$$

$$505. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z^2}{c} \right)' = \frac{z'}{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}.$$

$$506. \left(\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \right)' = 1 + \frac{z^2}{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}.$$

$$507. x + y = a, \quad x + y + z = 2a, \quad x + y = z, \quad x + y = 2z \\ y = x, \quad y = 3x.$$

$$508. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)' = \frac{1}{1}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$509. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)' = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$510. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)' = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$511. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)' = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{h}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$512. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)' = \frac{1}{h}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$513. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)' = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$514. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)' = \frac{z^2}{h^2}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$515. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)' = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$516. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)' = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$517. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)' = \left(\frac{x}{h} + \frac{y}{k} \right)^2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$518. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)' = \left(\frac{x}{h} - \frac{y}{k} \right)^2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$519. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)' = \frac{xy}{h^3}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$520. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = \frac{z}{h}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$521. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$522. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$523. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = \left(\frac{x}{h} \right)^2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$524. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^3 + \frac{z^6}{c^6} = \left(\frac{x}{h} + \frac{y}{k} \right)^2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$525. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = \left(\frac{x}{h} + \frac{y}{k} \right)^2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$526. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = \left(\frac{x}{h} \right)^2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$527. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \left(\frac{x}{h} + \frac{y}{k} \right)^2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$528. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^n = \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \right)^k \quad (n > k), \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$529. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^n = \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \right)^{n-k}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$530. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^n = \left(\frac{x}{h} \right)^{n-2}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$531. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^n = \left(\frac{x}{h} \right)^k \quad (n > k), \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$532. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^n = \left(\frac{yz}{h^2} \right)^{n-1}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$533. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{1}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$534. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^n = \frac{h^2}{xy} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

$$535. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^n = \sin \frac{\pi \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

- $$536. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad x=0, y=0, z=0$$
- $$537. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^n = \log a^{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}, \quad x=0, y=0, z=0.$$
- $$538. \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1, \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha, \left(\frac{z}{c} \right)^2 =$$
- $$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \beta, \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 0.$$
- $$539. \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 \right]^2 = \frac{4y^2}{h^2}.$$
- $$540. \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 \right]^2 = h^2.$$
- $$541. \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 \right]^2 = \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2.$$
- $$542. \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 \right]^2 = \frac{z}{h}.$$
- $$543. \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^2 + \frac{z}{c} = 1, \quad x=0, y=0, z=0.$$
- $$544. \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} \right)^2 = \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}, \quad x=0,$$
- $$y=0, z=0.$$
- $$545. \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} \right)^2 = h, \quad x=0, y=0, z=0.$$

Вычислить моменты инерции однородных тел с массой M , ограниченных поверхностями.

546. $x \geq 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$ — относ. осей координат.

547. $x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{H^2} z^2, z \leq H, z = 0$ — относ. $0, 0$.

548. $x^2 + y^2 \leq R^2, x^2 + y^2 = R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha, z = 0$ — относ. 0 .

549. $(x^2 + y^2 + z^2) = a^2$ — относ. 0 .

$$550. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — относ. осей координат.}$$

$$551. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ — относ. } O\alpha.$$

$$552. \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \text{ — относ. } O\alpha.$$

Вычислить координаты центра инерции однородных тел, ограниченных поверхностями:

$$553. z^2 = xy, x = a, y = b, z = 0.$$

$$554. z = c \cdot \frac{a-x}{a} + \frac{b-y}{b}, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$555. x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot z^2, x = 0, y = 0, z = c.$$

$$556. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = a^2 \quad (\alpha = 2\pi).$$

$$557. x^2 + y^2 = az, z = a.$$

$$558. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot z^2, z \geq 0.$$

$$559. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 yz, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$560. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 z.$$

$$561. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2, z = 0.$$

$$562. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z \geq 0.$$

$$563. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$564. \frac{z}{c} = \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1, \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = -1, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = -1, z = 0$$

$$565. \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$566. \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

567. Вычислить $\int \int \int xyz \, dx \, dy \, dz$, распространенный по объему, который определяется условиями: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (a^2 x + b^2 y + c^2 z)$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

568. При помощи системы координат $x = \frac{y}{a} \sqrt{a^2 - y^2}$, $z = \frac{y}{a} \sqrt{a^2 - y^2}$ найти (объем, ограниченный поверхностями $y = ax$, $y = a_1x$, $z = ay$, $z = a_1y$ ($a > a_1$), $x = by$, $x = b_1y$ ($b > b_1$), $z = c$, $z = c_1$ ($c > c_1$)).

569. Доказать, что для ортогональной системы координат $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, элемент объема имеет выражение $LMN du dv dw$ и элемент поверхности $u = u_0$ имеет выражение $MN du dv$, где $L = x'_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $M = x'_v = \frac{\partial x}{\partial v}$, $N = x'_w = \frac{\partial x}{\partial w}$, $L' = y'_u = \frac{\partial y}{\partial u}$, $M' = y'_v = \frac{\partial y}{\partial v}$, $N' = y'_w = \frac{\partial y}{\partial w}$.

570. Рассмотреть систему: $x = \frac{a \cos \psi}{a^2 - r^2}$, $y = \frac{a \sin \psi}{a^2 - r^2}$, $z = \frac{ar}{a^2 - r^2}$, проверить ее ортогональность и вычислить 1) объем, ограниченный поверхностями $u = u_0$, $v = 0$, $v = \pi$, $u > 0$, $u < u_0$; 2) часть поверхности $u = u_0$, выделенную поверхностями $v = 0$, $v = v_0$.

571. Рассмотреть систему: $x = a \sinh u \cosh v \cos \psi$, $y = a \sinh u \cosh v \sin \psi$, $z = a \cosh u \sinh v$, проверить ее ортогональность и вычислить 1) объем, ограниченный поверхностями $u = u_0$, $v = 0$, $v = \pi$, $u > 0$, $u < u_0$ ($0 < u_0 < \frac{\pi}{2}$); 2) часть поверхности $u = u_0$, вырезаемую поверхностью $v = v_0$.

572. Рассмотреть систему $x = \frac{a \sinh u \cos \psi}{\cosh u - \cos \psi}$, $y = \frac{a \sinh u \sin \psi}{\cosh u - \cos \psi}$, $z = \frac{a \sinh u}{\cosh u - \cos \psi}$, проверить ее ортогональность и вычислить 1) объем, ограниченный поверхностями $u = u_0$, $v = 0$, $v = \pi$, $u > 0$, $u < u_0$ ($0 < u_0 < \pi$); 2) часть поверхности $u = u_0$, вырезаемую поверхностями $v = 0$, $v = v_0$.

573. Вычислить для точек оси $P(0, 0, z)$ потенциальную функцию однородной сплошной полусферы: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$, где γ — вычислить распространения по объему полусферы тройной интеграл $\int \int \int \frac{\gamma d\omega}{r}$ (где γ означает плотности вещества полусферы, $d\omega$ — элемент ее объема и r — расстояние этого элемента до точки P).

574. Вычислить для точек оси $P(0, 0, z)$ потенциальную функцию неоднородной сплошной сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, если плотность γ (см. 573), $k = \frac{\gamma}{r}$, где k пропорциональна расстоянию точки до плоскости XOY .

575 Тот же вопрос при $\gamma = 1$.

576 Тот же вопрос при $\gamma = 1/\rho$, где ρ — расстояние точки от центра сферы.

577 Вычислить для точек оси $P(0, 0, z)$ потенциальную функцию однородного сплошного эллипсоида вращения радиуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) \quad (\text{см. 573}).$$

578 Тот же вопрос для сплюснутого эллипсоида вращения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$.

ОТДЕЛ V.

Интегрирование дифференциальных уравнений.

Принтегрировать следующие дифференциальные уравнения.

1. $\frac{x}{1-x^2-y^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + y' \left(\frac{y}{1-x^2-y^2} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y} \right) = 0.$

2. $x(2x+y) + y(x^2-2y) + y' = 0.$

3. $3x - y + y'(4y - x) = 0.$ 4. $2x \frac{x^2+y^2}{x-y} + y' \frac{x^2-y}{y} = 0.$

5. $3x^2 - 2x - y + y'(2y - x + 3y^2) = 0.$

6. $\left(1 + \frac{xy}{1-x^2-y^2} - 2xy - \frac{y}{x} \right) + y'(1-x^2-y^2) \lg x = 0.$

7. $\sin y + y \sin x + \frac{1}{x} + y' \left(\cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) = 0.$

8. $x + y + 3x - y' = 0.$ 9. $\sqrt{1-y^2} + y' \sqrt{1+x^2} = 0.$

10. $1 - y + y(1-x) = 0.$ 11. $(y - xy)y' + x - y = 0.$

12. $1 - 1 - y + y' \sqrt{1-x^2} = 0.$ 13. $x \sqrt{1-y^2} + y' \sqrt{1+x^2} = 0.$

14. $y + 3x - y + y' = 0.$

15. $y + 3y - xy + 2 - y = 0.$ 16. $y(5 + 3x^2) + y' = 0.$

17. $3y - 2y + y(4x - 3x^2y) = 0.$

18. $y(5 - 3x^2y) + y'(2 - 1 - xy) = 0.$

19. $3y - 4xy + y + 5y' - 7xy' = 0.$

20. $1/y - 1/y - 3(y') - 1/x - 3y - 2xy = 0$
 21. $3y + xy' + x^2y^2(5y + 2xy') = 0$,
 22. $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$,
 23. $ax - 2by - cy + y'(bx - 2ay - 1/y') = 0$,
 24. $4x - xy - y' - y'(x - xy - 4y) = 0$,
 25. $3y' - 2xy - 2x - y'(y' - xy - x) = 0$,
 26. $4x' + xy - 3y - y(x - 5x - 2xy - y) = 0$,
 27. $4y' - 5xy - 6x - y(y' - 2xy + 6x) = 0$,
 28. $1/x - 1/y - 3xy - y' + y'(x - 2xy - xy - y) = 0$,
 29. $1/y - cy - 3y' + y(x - x' - 2xy - xy - y) = 0$,
 30. $ax + 3by - cxy - 1/y' - y(bx' - cy - 3/xy + qy) = 0$,
 31. $4x + 3cy - y - y(x - 3y - 4y) = 0$,
 32. $2xy'(x' + y - y(y + 2x'))$, 33. $xy = 1/y'$,
 34. $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$,
 35. $2x + 2y - 1 + y'(x + y - 2) = 0$,
 36. $3x + y - 2 - y'(x - 1) = 0$, 37. $x - y - 3 - y - 3x - y - 1 = 0$,
 38. $2x - 4y + y(x - y - 3) = 0$, 39. $y = e^{x-y+1}$,
 40. $y = \sin^2 x - y - 1$, 41. $y' = x - y - 2$,
 42. $y - 2x - 1 + y(x + 2y - 1) = 0$,
 43. $2x + y - 4 + y'(x + y - 3) = 0$,
 44. $(x + y - 1)y'^2 = x + y + 2$,
 45. $(x + y - 1) + y'(2x + 3y + 2) = 0$,
 46. $(x' - 2x - 1 - y - (x - 1 - y) = x - 1$,
 47. $x \lg(x/y' - y - x^2(3 \lg x - 1))$, 48. $(a^2 - x - y + xy = a^2$,
 49. $(2x - 1)y' - 2y = \frac{1 - 4x}{x^2}$, 50. $2xy - y = 3x^2$,
 51. $y' - 3x^2 - 2x - y(6x - 2 - \frac{2}{x} - 9x - 4) = 0$,
 52. $x \sin x + y = \sin x - x \cos x$, $y = \sin x \cos x - x$,
 53. $xy' - (x + 1)y = x^2(1 - x)$,
 54. $x'x^3 - 1 - y - 2x^2 - 1, y = \frac{x^4 - 2}{x}$,
 55. $\lg(x/y' - 1 - \lg x) + \frac{1}{2} \lg x = 2 - \lg x$,
 56. $x(x - 1)y' - y = x^2 - 2x - 1$, 57. $y = xy' - x$

$$58. y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a}$$

$$59. 3xy' - 2y = \frac{x''}{y^2}.$$

$$60. xy' - y = \frac{1}{y^2(x+1)}.$$

$$61. 2 \sin x \cdot y' - y' \cos x - y^2 (1 + \cos x - \sin x).$$

$$62. x y' - 2x'y' + y'^2 = 1 - 2x^2$$

$$63. 1/x(x-1)y' - (2x+1)y = \frac{1}{x^2} \sqrt{x-3x+1}.$$

$$64. xy^3 y' - y^5 = \frac{1}{3} x^4.$$

$$65. xyy' - y^2 = x^4.$$

$$66. y' + y \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x^2+x+1)^{3/2}}.$$

$$67. 3y' + y \frac{x^2+a^2}{x^2-x^2-a^2} = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{x(3x^2-a^2)}{x^2-a^2}.$$

$$68. 2y'(x^2+a^2) - xy' - y^4(3x-2a) = 0.$$

$$69. x^2 - y^2 + 2xyy' = \frac{1}{x}(xy' - y).$$

$$70. x^2 - x - yy' - xy' = y.$$

$$71. y^2 + x y' = y' - y.$$

$$72. (x^2+1-y) = xy' - y$$

$$73. x^2 - 2y' - xy y' - y = 0$$

$$74. x + yy' = \frac{1}{x}(xy' - y).$$

$$75. x^2 + y'^2 = x^2.$$

$$76. x = \lg y' + \sin y'.$$

$$77. x = y' + \arcsin y'$$

$$78. x = y'^2 + \cos y'.$$

$$79. x = y' + \sin y'.$$

$$80. 2y' - \lg y = x.$$

$$81. x = y'^2 - 2y' + 2.$$

$$82. y = x^2 - y'^2.$$

$$83. y^2 + y'^2 = 1.$$

$$84. y'^2 - y^2 = 1.$$

$$85. y = \arcsin y' - \lg(1 - y').$$

$$86. y = \frac{1}{y'} - y'^2 \cos y'.$$

$$87. y = y'(1 - y' \cos y').$$

$$88. y = a \left(y'^2 + \frac{1}{1-y'} \right).$$

$$89. 2y(1 - y' - y' + 1).$$

$$90. 2y' + y' = y = 0.$$

$$91. yy' = y^2 + y'^2.$$

$$92. yy'^2 = y^2 - y'^2.$$

$$93. 2y^2 - 3xy - y'^2 = y - y'.$$

$$94. (1 - y'^2) - 2(x^2 - y)y' - 2xy = 0.$$

$$95. y'^2 - (1 + 1)y y' + y^2 = 0.$$

$$96. xy y' = (x^2 - y^2)y' - y = 0.$$

$$97. y(1 - y'^2) = k xy' - y.$$

98. $y'' - 2xyy' = y^2 - (a^2 - 1)y^2$ 99. $y - xy' = \frac{a}{2y}$
100. $y - xy' = \frac{a}{y^2}$ 101. $y - xy' = \frac{ay'}{y^4 + 1}$
102. $y - xy' = \frac{ay'}{y^2 - 1}$ 103. $(y - xy' - ay^2)^2 = a^2(1 - y^2)$
104. $(y - xy')^2 = a^2y'^2 + b^2$ 105. $y - xy' = \frac{ay'}{1 + y^2}$
106. $y - xy' = y'^2$ 107. $y - xy' = a \sqrt{1 - y^2}$
108. $y = c - \operatorname{arctg} y'$ 109. $y - 2xy' = \lg y$
110. $y = x + \operatorname{arc} \sin y'$ 111. $y - xy' = \frac{y^2}{1 + y^2}$
112. $y = 2xy' - \ln y$ 113. $y - \frac{3}{2}xy' = y^2 - 1$
114. $y - \frac{3}{2}xy' = \frac{1}{y}$ 115. $y - 2xy' = \sin y$
116. $y - 2xy' = \operatorname{arctg} y'$ 117. $y = 2xy' + \operatorname{arc} \sin y'$
118. $y - \frac{3}{2}xy' = x$ 119. $y = \frac{3}{2}xy' - 1 + y^2$
120. $y = 2xy' - \ln(1 + y')$ 121. $y - 2xy' = \log \frac{y'}{1 + y'}$
122. $y = x - x^2$ 123. $y - xy' = \frac{3}{2}xy'$
124. $y - \frac{1}{2}xy' = y^2 - x^2$ 125. $y - x^2 = \frac{1}{2}xy'$
126. $y - 2xy' = \frac{1}{2}xy' - x^2$ 127. $4x^2 = y'^2 - (7x^2 - 6y)$
128. $6y = y'^2 + 2x^2$ 129. $x - y = y^2 - y'^2$
130. $y = xy' - y y'$ 131. $xy' - 1 = y^2$
132. $xy'^2 = \frac{1}{2}xy' - y'^2$ 133. $xy' = 1 - \frac{3}{2}xy'$
134. $y - \frac{1}{2}xy' = y$ 135. $xy'^2 = 1 - \frac{1}{2}xy' - y'^2$
136. $xy' = \frac{1}{2}xy' - y'^2$ 137. $y'' - 5y' - 6 = 0$
138. $y'' - 2y' - 3 = 0$

139. $y' = 1 + y^{-1/2}$.

141. $y''^2 - y' = 1$.

143. $y''(1 + 2 \lg y') = 1$.

145. $y y'' - 2y' = 3(1 - y')^2$.

147. $2y''y^2 = 1$.

149. $3y'' = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$.

151. $xy'' - (1 + 4x^2)y' = 2(1 - 4x^2)$.

153. $(1 - x^2)y'' + \{1 - y'^2\} = 0$.

155. $x^4 y'''' - 2x^3 y'' = 1$.

157. $2y'''x - y'' = \frac{y'^3}{x}$.

159. $yy'' - y'^2 = y^4$.

161. $y'' + 6yy' = 0$.

163. $y'' = y'$.

165. $2yy' = 1 + y'$.

167. $yy'''' - y''^2 = 6y'^3$.

169. $(1 + y)y' - y' = 1 - y'^2$.

171. $y'' y'^2 = y'$.

173. $y''(1 + 1 - y^2) = y'(1 + 1 - y^2)$.

175. $yy'' - y' = 1 - y'^2$.

177. $y'y'' - y''^2 = y'^4$.

179. $y'^2 = y''(y + 1 - \lg y')$.

181. $y' = y''(2y + y'^2 \cos y')$.

183. $2x(yy'' - y'^2) - yy' = 2x^2y^2$.

184. $(2x - 1)(y'' - yy') - 2yy' = \frac{y}{x}(1 - 4x)$.

185. $(yy'' - y') + (3x - 2x) - yy'(6x - 2) - \frac{y^2}{x}(18x - 6) = 0$.

186. $x^2(yy'' - y'^2) - xyy' + 6y^2 = 0$.

187. $3xy'^2 + yy' - y'^2 = 3yy'' = xy^4$.

188. $xy'(yy' - y'^2) - yy' = x^4y^3$.

140. $y''^2 - y' = y^3$.

142. $3(y'' + y''^2) = 2y''$.

144. $y''(y' + 2)e^y = 1$.

146. $y''y' = 1$.

148. $4y'' = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$.

150. $xy'''' - y'' = x^2$.

152. $xy'^2y'' - y'^4 = \frac{1}{3}x^3$.

154. $xy'''' - y'' = \frac{1}{x}y''$.

156. $(x - 1)y'' - 2y' = \frac{x}{2x^2}$.

158. $yy'' - y'^2 = y^2y'$.

160. $yy'' + y'^2 = 1$.

162. $y'' = y'(1 + y'^2)$.

164. $yy'' - y'^2 = y'$.

166. $3yy'y'' = 1 + y'^3$.

168. $(1 + y)y'' = y'^2$.

170. $y''(y'y' - y''^2) - 3y'y'y'' = y'$.

172. $(1 - y^2)y'' - 2yy'^2 = y'$.

174. $yy'' - y'(y' + 1 - y'^2) = y'$.

176. $yy'' - y'^2 = \frac{y'}{y}$.

178. $y' = y''(y'^2 + 2y)$.

180. $y'^2 = y''(y - 2y'^2)$.

182. $3y''^2 - y'y''' - y'^2 \varphi(y)$.

$$190. yy'' - y' = yy \cos x$$

$$191. yy' - y'^2 = \frac{2yy'}{x}.$$

$$192. yy' - y = \frac{6xyy'}{3x-1}.$$

$$193. yy'' - y'^2 = \frac{y'}{1-x} \frac{y'^2}{x}.$$

$$194. yy'' - 3yy'y'' - 2y'^2 = \frac{y}{x} (yy'' - y'^2) = \frac{y'}{x^2}.$$

$$195. yy'' - y' = \frac{yy'}{1-x}.$$

$$196. yy'' - y' = \frac{y}{x} \frac{y'}{y-y'}.$$

$$197. x yy'' - y' = 2yy' \frac{y}{1-x}.$$

$$198. yy'' - y' = y(1-y-y').$$

$$199. yy'' - y'^2 = \frac{y'}{1-x} \frac{y'}{x}.$$

$$200. x (yy'' - y') = y \frac{y'}{1-x} \frac{y'}{y-y'}.$$

$$201. yy' = 3yy'y'' - 2y'^2 = y \frac{y'}{x}.$$

$$202. x (yy'' - y') = yy' = \frac{y'^2}{x}.$$

В задачах 203—214 требуется проинтегрировать линейные уравнения 2-го порядка, зная частное решение u_1 уравнения без последнего члена:

$$203. (1+x^2)y'' - xy' - y + 1 = 0; u_1 = x.$$

$$204. (2x^2 - 3x - 1)y'' - 2xy' - 2y + 2 = 0; u_1 = x.$$

$$205. (4x^2 - x)y'' - 2(2x-1)y' - 4y - 12x^2 - 6 = 0; u_1 = \frac{1}{x}.$$

$$206. y'' - y' + y(e^{2x} + xe^x - 1) = 0; u_1 = \sin(e^x).$$

$$207. x^4 y'' + x^2(2x-3)y' + 2y = \frac{2-3x}{x}; u_1 = e^{x^2}.$$

$$208. x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3); u_1 = x^2.$$

$$209. x(4x+3)y'' + 2(2x+3)y' - 4y - 6x(2x-3) = 0; u_1 = \frac{1}{x}.$$

$$210. y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{\cos x}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sin x; u_1 = x.$$

$$211. y'' + \frac{x \sin x}{\sin x} y' + \frac{\sin x}{x \cos x} y = \frac{2(x \sin x - x \cos x - \sin x)}{x^2 (\sin x - x \cos x)}; u_1 = x.$$

$$212. y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y = \frac{2(x^2 + x - 1)}{x^2(x-1)}; u_1 = e^x.$$

$$213. y'' = \frac{1+2\lg x}{x(1+\lg x)}, y' = \frac{1}{x^2(1+\lg x)}, y = \frac{2\lg x}{x(1+\lg x)}, u_1 = \lg x.$$

$$214. y'' = \frac{4x^2+1}{2x(2x-1)}, y' = \frac{2x}{2x-1}, y = \frac{2x^2-x-1}{2x(2x-1)}, u = 1/x.$$

$$215. y'' - y = x \operatorname{ch} x$$

$$216. y'' + y = x^2 \sin x.$$

$$217. y'' - 3y' - 2y = xe^x.$$

$$218. y'' - y = \sin x$$

$$219. y''' - y'' - y' - y = x^2 + x.$$

$$220. y^{(4)} - y' = 1 + 2 \operatorname{ch} x.$$

$$221. y^{(4)} - 16y = 3x + 1.$$

$$222. y^{(4)} - 2y'' - y' = \cos x$$

$$223. y^{(4)} + 8y'' - 16y = xe^{-x} - e^x \sin 2x$$

$$224. y^{(4)} - 4y''' - 8y'' - 16y' + 16y = \frac{1}{3} e^{2x} - \cos 2x$$

$$225. y^{(4)} - 3y''' - 4y'' - 3y' - y = \frac{1}{2} e^{-x} - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}$$

$$226. y^{(4)} + 14y'' + 49y = xe + \sin x.$$

$$227. y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 16y' + 16y = 2e^{-x} - \sin 2x$$

$$228. y^{(4)} - 12y'' - 36y = xe^{-x} - e^{-x} \sin(x|6).$$

$$229. y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$230. y^{(4)} + 4y''' - 6y'' + 4y' - y = xe^{-x} - 3 \cos 2x.$$

$$231. y^{(4)} + 4y''' = 1 + 3 \sin 2x.$$

$$232. y^{(4)} - y^{(3)} = xe^{-x} - 1.$$

$$233. y^{VI} + y = x.$$

$$234. y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

$$235. y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$236. y'' + y' = \frac{1}{\ln x}.$$

$$237. y^{(4)} - 2y'' - y' + 2y = \frac{2x^6 - x^2}{x^4} - 4x - 6.$$

$$238. y^{(4)} + y'' - y' - y = \frac{2 \sin x - 3 \cos x}{\sin^4 x}$$

$$239. 2y'' + y(3y' + 2) = 0.$$

$$240. x^4 y'' + 2x^3 y' - 4y = x^6 - 2x.$$

$$241. x^4 y'' - e^3 y = 0.$$

$$242. xy'' - y' = 0.$$

$$243. x^3 y'' + xy' + y = 2x.$$

$$244. (2x+1)^2 y'' - 2(2x+1) y' + 4y + 2 = 0.$$

$$245. \quad x - 4)^n y^{(n)} - 6(x-4)^{n-1} y' - 8(x-4)^{n-2} y = 10y = (x-4)^{n/2} \lg x - 1.$$

$$246. \quad (2x+3)^n y^{(n)} + 6(2x+3)^{n-1} y'' + 4(2x+3)^{n-2} y' + 8y = \sin \lg (2x+3).$$

$$247. \quad (x+1)^n y^{(n)} - 3(x+1)^{n-1} y'' + 4(x+1)^{n-2} y' - 4y = (x+1)^{n/2} \lg (x+1).$$

$$248. \quad (2x-1)^n y^{(n)} - 6(2x-1)^{n-1} y'' + 4(2x-1)^{n-2} y' - 8y = \lg \frac{2x-1}{2x+1}.$$

$$249. \quad x^n y^{(n)} - x^2 y'' - 3x y' - y = 2 \lg \frac{x}{x-1}.$$

$$250. \quad (x+2)^n y^{(n)} - 3(x+2)^{n-1} y'' + (x+2)^{n-2} y' - y = \frac{1}{x-2} \lg (x+2).$$

$$251. \quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = e^x (x^2 + 2x + 2).$$

$$252. \quad x^2 y'' + xy' - y = x \cos x + (x^2 + 1) \sin x.$$

$$253. \quad 4x^2 y'' + 4xy' - y = \frac{1}{\cos^2 x} \{8x^2 \sin x - 4x \cos x - \sin x \cos^2 x\}.$$

$$254. \quad \frac{dx}{dt} = 3 - 2y.$$

$$255. \quad \frac{dx}{dt} = 3x - \frac{1}{2}y - 3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}.$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2t.$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y - 2t - 1.$$

$$256. \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} + y + 3t - \sin t.$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2}{t^2}x + \frac{1}{t}y + 2 \cos t - \frac{\sin t}{t}.$$

$$257. \quad \frac{dx}{dt} = x - e^{2t}y - t - \frac{1}{t}e^{2t} - 2.$$

$$258. \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y^n}.$$

$$\frac{dy}{dt} = x \cdot e^{-2t} - y + (1-t)e^{-2t} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}.$$

$$259. \quad \frac{dx}{dt} = z.$$

$$260. \quad \frac{dx}{dt} = y + z.$$

$$261. \quad \frac{dx}{dt} = 4y + z.$$

$$\frac{dy}{dt} = x.$$

$$\frac{dy}{dt} = z - x.$$

$$\frac{dy}{dt} = z.$$

$$\frac{dz}{dt} = y.$$

$$\frac{dz}{dt} = x + y.$$

$$\frac{dz}{dt} = 4y.$$

$$262. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 3x \\ \frac{dz}{dt} = 3x - y \end{cases} \quad 263. \begin{cases} t \frac{dx}{dt} = 4x + y + 2z - \sin t - 2 \cos t \\ t \frac{dy}{dt} = -2x - y - 2z - \sin t + 2 \cos t - t \cos t \\ t \frac{dz}{dt} = -x - y - z - \sin t - \cos t - t \sin t \end{cases}$$

$$264. \begin{cases} 3t \frac{dx}{dt} = (t-1)x - y - tz \\ 3t \frac{dy}{dt} = (t-2)x - 2y - tz \\ 3t \frac{dz}{dt} = (2t-1)x - y - 2tz \end{cases} \quad 265. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2z - t - 2 \\ \frac{dy}{dt} = 1 - x \\ \frac{dz}{dt} = -x - y - z - t - 1 \end{cases}$$

$$266. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y \\ \frac{dy}{dt} = -2z \\ \frac{dz}{dt} = 2x - 8y - 2z \end{cases} \quad 267. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - t - 3 \\ \frac{dy}{dt} = 7 - 2z \\ \frac{dz}{dt} = 2y - 2t \end{cases}$$

$$268. \begin{cases} 3t \frac{dx}{dt} = 2x - y - z \\ 2t \frac{dy}{dt} = x + 3y + z \\ 6t \frac{dz}{dt} = -x - 7y - 5z \end{cases} \quad 269. \begin{cases} t \frac{dx}{dt} = 2x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = -3x - y - 2z \end{cases}$$

$$270. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 2y - 1 \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y - 2z \\ \frac{dz}{dt} = 5x + 2y + 7 \end{cases} \quad 271. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = y + z \\ \frac{dz}{dt} = x \end{cases}$$

272 - 285. В этих задачах требуется найти общий интеграл уравнения с частными производными и такое частное решение, которое удовлетворяет специальным условиям, приспешанным в скобках.

$$272. x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} - z = y. \quad (\text{при } x=a, z=y^2+a^2).$$

$$273. y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2. \quad (\text{при } y = a, z = x^2 - a^2).$$

$$274. y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2. \quad (\text{при } x = a, z = 1 + 2y + 3y^2).$$

$$275. \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}. \quad (\text{при } x = 1, z = \log y + \frac{1}{2} - y).$$

$$276. (x+1) \frac{\partial z}{\partial x} + (y+1) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$$

$$277. (x+y) \frac{\partial z}{\partial x} - (x-y) \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

$$278. (y - 2x^2) \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

$$279. 2y \frac{\partial z}{\partial x} - (x+y) \frac{\partial z}{\partial y} = 2y^2.$$

$$280. y \frac{\partial v}{\partial x} - xy \frac{\partial v}{\partial y} + x \frac{\partial v}{\partial z} = y - x^2 - xz \quad (\text{при } z = 1, \\ v = x + xy + y^2).$$

$$281. x \frac{\partial v}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2x}{z} \quad (\text{при } z = 1, V = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}).$$

$$282. y \frac{\partial v}{\partial x} - x \frac{\partial v}{\partial y} + x \frac{\partial v}{\partial z} = yz - \frac{xz - x^2}{z^2} \quad (\text{при } x = 1, v = y^2 + z^2).$$

$$283. x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z} = 2(x^2 + y^2) \quad (\text{при } x = 1, v = (y+z)^2).$$

$$284. x \frac{\partial v}{\partial x} + 4y \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{x - y}{1 - x - z} \quad (\text{при } z = 1, v = x^2 + y^2).$$

$$285. x \frac{\partial v}{\partial x} - (x+z) \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial v}{\partial z} = x(2yz - x) \cos(xyz).$$

286 291. Найти кривые, для которых длина дуги S , отсчитываемая от данной точки, представляется заданной функцией от координат x, y конца дуги:

$$286. \text{От т. } (0, 0) \quad S = x + \frac{1}{2} ay. \quad 287. \text{От т. } (a, a) \quad S = x - \frac{a^2}{y}$$

$$288. \text{От т. } \left(0, \frac{\pi a}{2}\right) \quad S = x - a \cos \frac{y}{a}. \quad 289. \text{От точки } (a, a) \quad S = y - \frac{x^2}{a^2}.$$

290. От г. $a, -a$ $S = y \cdot \frac{x^2}{a}$.

291. От г. (a, a) $S = 2a - 1 \sqrt{2 \cdot x - y}$

292—296. Найти кривые, для которых длина дуги между любыми двумя точками: $S_1 \rightarrow S_0$ равна разности двух значений некоторой функции координат,—значений, отвечающих концу и началу дуги:

292. $S_1 \rightarrow S_0 = \frac{y_1^2 - y_0^2}{a}$.

293. $S_1 \rightarrow S_0 = a \log \frac{y_1}{y_0}$

294. $S_1 \rightarrow S_0 = 1 \sqrt{ay_1} - 1 \sqrt{ay_0}$.

295. $S_1 \rightarrow S_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} y_1 - y_0$

296. $S_1 \rightarrow S_0 = \frac{y_1^3}{T_1} - \frac{y_0^3}{T_0}$, где T длина касательной.

297—300. Найти кривые в полярных координатах, для которых длина дуги между любыми двумя точками $S_1 \rightarrow S_0$ равна разности следующих отрезков, построенных для конца и начала дуги T —полярная длина касательной, N —пол. дл. нормали, S_t —пол. подбасательная, P_t —длина перпендикуляра, опущенного из полюса на касательную).

297. $S_1 \rightarrow S_0 = T_1 - T_0$.

298. $S_1 \rightarrow S_0 = N_1 - N_0$.

299. $S_1 \rightarrow S_0 = S_{t1} - S_{t0}$.

300. $S_1 \rightarrow S_0 = (P_{t1} - P_{t0})$.

301—307. Найти кривые, для которых площадь Q , ограниченная кривою, осью абсцисс и двумя ординатами. $X = x_0$, $X = x$, представляется данною функциею от координат (x, y) .

301. $Q = a^2 \log \frac{y}{a}$, $x_0 = 0$.

302. $Q = \frac{y^2}{a}$, $x_0 = 0$.

303. $Q = \frac{xy^2}{a^2}$, $x_0 = a$.

304. $Q = bx - ay$, $x_0 = 2a$.

305. $Q = \frac{a^2 x}{y}$, $x_0 = a$.

306. $Q = y \cdot S_t$, $x_0 = -\infty$

307. $Q = a \cdot S$, $x_0 = 0$, S (длина дуги считается от точки $(0, a)$.

308—314. Найти кривые, для которых площадь сектора Q , ограниченного кривою и радиусами векторами $\vartheta = \vartheta_0$ и $\vartheta = \vartheta$, выражается данною функциею координат r, ϑ :

308. $Q = \frac{1}{2} ar^2$, $\vartheta_0 = 0$.

309. $Q = \frac{1}{4} r^2 \vartheta$, $\vartheta_0 = 0$

$$310. Q = \frac{1}{2} \frac{r^{2q}}{a}, \quad \vartheta_0 \text{ не } 0. \quad 311. Q = \frac{1}{2} (r^2 - a^2 \vartheta), \quad \vartheta_0 = 0.$$

$$312. Q = \frac{a}{2} (r - a \vartheta), \quad \vartheta_0 = 0. \quad 313. Q = \frac{r^2}{a}, \quad \vartheta_0 \text{ произвольно.}$$

$$314. Q = \frac{1}{2} r S_t - \left(\frac{1}{2} r S_t \right)_0, \quad \vartheta_0 \text{ произвольно, } S_t \text{ полярная}$$

подкасательная.

315—317. Найти кривые, для которых объем вращения V около оси x или поверхность вращения S_x около оси x представляются данными функциями координат x, y , при чем часть кривой берется между ординатами $\lambda = x_0, X = x$:

$$315. V_x = \frac{1}{h} \pi x y, \quad x_0 = 0. \quad 316. V_x = \pi y^3 S_t, \quad x_0 = -\infty$$

317. $S_x = 2\pi y T, \quad x_0 = -\infty$ (S_t — подкасат., T — длина касательной).

318—341. Найти кривые, для которых отрезки, отсекаемые касательною на осях координат (X_t, Y_t), или отрезки, отсекаемые нормалью на осях координат (X_n, Y_n), имеют следующие выражения:

$$318. X_n = r : a. \quad 319. X_n = \frac{x^2}{a}. \quad 320. X_n = \frac{1}{a} x.$$

$$321. X_n = \frac{x^2}{x^2 + y^2}. \quad 322. X_n = \frac{2(x^2 + y^2)}{x}. \quad 323. X_n = \frac{x^2 + y^2}{a}.$$

$$324. Y_n = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad 325. Y_n = \frac{x^2 + y^2}{2a}. \quad 326. Y_n = x.$$

$$327. Y_n = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}. \quad 328. X_t = \frac{x^2}{a}. \quad 329. X_t = x + a \cot \frac{\pi}{a}.$$

$$330. X_t = \frac{x^2}{a^2}. \quad 331. X_t = \frac{y^2}{a}. \quad 332. X_t = \frac{x^2}{ay}.$$

$$333. X_t = \frac{x^2 - y^2}{y}. \quad 334. Y_t = \frac{x^2}{a}. \quad 335. Y_t = x.$$

$$336. Y_t = \frac{xy}{a}. \quad 337. Y_t = \frac{\sqrt{xy^2}}{a}. \quad 338. Y_t = \frac{y^2}{x}.$$

$$339. Y_t = \frac{y^2}{a}. \quad 340. Y_t = S_n \text{ (поднормаль)}. \quad 341. Y_t \cdot S_n = ay.$$

342 378. Найти кривые в прямоугольной системе, обладающие следующими свойствами (S_t —подкасательная, S_n —поднормаль, T —длина касательной, N —длина нормали, L_t и L_n —отрезки касательной и нормали, заключенные между осями координат, P_t , P_n —перпендикуляры, опущенные из начала на касательную и нормаль):

$$342. S_n = 3y - 2x. \quad 343. N \cdot T = 2xy. \quad 344. N \cdot T = 2y\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$345. P_t = \frac{1}{k}\sqrt{x^2 + y^2}. \quad 346. P_t \cdot N = a^2 - y^2. \quad 347. X_t^4 - Y_t^4 = a^4.$$

$$348. X_t \cdot Y_t = 4a^2. \quad 349. L_t = N. \quad 350. \frac{1}{X_t} - \frac{1}{Y_t} = \frac{1}{a^2}.$$

$$351. x \cdot T = y \cdot N. \quad 352. L_n \text{ делится точкой } (x, y) \text{ пополам.}$$

$$353. L_t \text{ делится точкой } (x, y) \text{ пополам.}$$

$$354. L_t \text{ делится точкой } (x, y) \text{ в отношении } m : n \text{ (от оси } x \text{ к } y).$$

$$355. L_t \text{ делится пополам в точке пересечения с параболой } y^2 = 2px.$$

$$356. T = a. \quad 357. N^2 + T^2 = a^2. \quad 358. N \cdot T = ay.$$

$$359. N \cdot T = \frac{y^2}{a}. \quad 360. \frac{1}{N} + \frac{1}{T} = \frac{x}{ay}. \quad 361. N \cdot S_n = h^2.$$

$$362. N \cdot T = xy. \quad 363. N^2 + T^2 = x^2. \quad 364. N + S_n = a.$$

$$365. N \cdot T = aS_n. \quad 366. \frac{1}{N} + \frac{1}{S_n} = \frac{1}{a}. \quad 367. \frac{1}{N} + \frac{1}{T} = \frac{1}{a}.$$

$$368. X_n \cdot Y_n = NT. \quad 369. P_n = a. \quad 370. \frac{1}{X_n} + \frac{1}{Y_n} = \frac{1}{a}.$$

$$371. L_n = T. \quad 372. N = x. \quad 373. T = x.$$

$$374. T^2 = xy. \quad 375. L_t = L_n. \quad 376. P_n = r$$

$$377. P_n \cdot N = a \cdot S_n. \quad 378. L_n = a.$$

379 -390. Найти кривые в полярных координатах, обладающие следующими свойствами (N , T —длина нормали и касательной, S_n , S_t —поднормаль и подкасательная, P_t —перпендикуляр из полюса на касательную):

$$379. N = a. \quad 380. T \cdot S_n = a^2. \quad 381. P_t = \frac{r^2}{a}.$$

$$382. T = a. \quad 383. S_t = \sqrt{a^2 - r^2}. \quad 384. N^2 + T^2 = a^2.$$

$$385. N \cdot T = a. \quad 386. N \cdot T = a^2. \quad 387. \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{a}$$

$$388. T = \frac{r}{a}. \quad 389. N \cdot S_1 = a. \quad 390. N = \frac{r^m}{a^2}$$

391–411. Найти кривые, у которых радиус кривизны R имеют следующие выражения через координаты x, y , через отрезки N, T, S_n, S_t длины нормали и касательной, поднормаль, подкасательная) и угол α касательный с осью x

$$391. R = 5 \mid ax^4, \text{ при чем касательная в точке } (0, 0) \text{ есть ось } x.$$

$$392. R = 4 \mid ay^4 \text{ и касат. в точке } (0, 0) \text{ ось } x.$$

$$393. R = 3 \mid \overline{ax^2} \text{ и касат. в точке } (0, 0) \text{ есть } x$$

$$394. R = k \cdot N \quad 395. R^2 y' = x(N^2 - T^2). \quad 396. R = \frac{xN^2}{y^2}$$

$$397. R = \frac{T}{y}. \quad 398. R = \frac{T_x}{y}. \quad 399. R = \frac{NT}{y^2}.$$

$$400. R = \frac{xTN^2}{y^3}. \quad 401. R = \frac{yT}{S_n}. \quad 402. R = 1 \cdot \frac{y}{T}$$

$$403. R = k \cdot \left(\frac{N}{S_n} \right)^2. \quad 404. R = k \cdot \frac{S_n}{y}. \quad 405. R = k \cdot \frac{N}{y}.$$

$$406. R = k \cdot \frac{T}{y}. \quad 407. R^2 = N^2 + T^2 \quad 408. R = k \cdot a.$$

$$409. R = k \cdot \alpha^2. \quad 410. R^2 = \frac{k^2}{\sin^2(2\alpha)}. \quad 411. R^2 = \frac{k^2}{\cos^2(2\alpha)}.$$

412–421. Найти кривые, у которых радиус кривизны R представляется данною функциею от длины дуги s , при чем $s = 0$ в точке, где $\alpha = 0$.

$$412. R = 2 \sqrt{as} \quad 413. R = 3 \sqrt[3]{as^2} \quad 414. R = a \operatorname{ch} \frac{s}{a}$$

$$415. R = 2a \operatorname{ch} \frac{s}{a}. \quad 416. R = \frac{a^2 + s^2}{a}. \quad 417. R = \sqrt{a^2 - s^2}.$$

$$418. R = a \sqrt[3]{e^{\frac{s}{a}} - 1} \quad 419. R = a \cdot s. \quad 420. R^2 = a^2 + s^2.$$

$$421. R = \sqrt{2as - 4s^2}.$$

422 434. Определить кривые в полярных координатах, у которых разность кривизны представляется следующей функцией от радиуса вектора r и отрезков N , T , S_n , P , P_n (длина нормали, касательной, поднормаль, перпендикуляры — опущенные из полюса на касательную, и нормаль)

$$422. R = \frac{1}{k} N. \quad 423. R = \sqrt{r^2 - a^2}, \text{ при чем касательная}$$

в точке $(a, 0)$ есть полярная ось.

$$424. R = P_r. \quad 425. R = \frac{NT}{r + T}. \quad 426. R = T$$

$$427. R = S_n. \quad 428. R = P_n. \quad 429. R^2 = T^2 + N^2.$$

$$430. R = \frac{N^2}{r}. \quad 431. R = \frac{N^2}{r^3}. \quad 432. \frac{1}{R} = \frac{1}{T} + \frac{1}{N}.$$

$$433. R = \frac{NS_n}{r}. \quad 434. R = r.$$

435- 453. Найти изогональные траектории для данных систем кривых при переменном параметре a ; угол $\omega = \frac{\pi}{2}$, в тех задачах, где значение его дано.

$$435. r^2 - 2ax = a^2 (a > 0). \quad 436. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - r^2} = 1 \text{ (const., } a > a_0 \text{)}.$$

$$437. x^2 - 3xy^2 = a^3. \quad 438. \cos y = ae^{-x}.$$

$$439. (x^2 - y^2)^2 = a^2 (x^2 - 3xy^2). \quad 440. x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 = a^5.$$

$$441. x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = a^4. \quad 442. (x^2 - y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

$$443. xy^3 = x^a. \quad 444. x^2 - \frac{1}{2} y^2 = a^2.$$

$$445. x + y^2 = a^4. \quad 446. x^2 - y^2 = 2axy$$

$$447. xy = a^2. \quad 448. x^2 + \frac{1}{3} y^3 = a^3.$$

$$449. r^4 = a^4 \sin^4 \theta. \quad 450. (x - x_0)^2 + y^2 = a^2 (x^2 + y^2 - r_0^2).$$

$$451. xy = \pm a^2, \quad \omega = \frac{\pi}{4}. \quad 452. x^2 - 2a^2 y = r^2 (1 - \cos \theta), \quad \omega = \frac{\pi}{3}.$$

453. $r^4 = a^4 \sin^4 \theta$ при произвольном угле ω .

454 471. Найти эвольвенты следующих кривых:

$$454. x = a(t - \sin t). \quad 455. x = \frac{p}{2} \tan^2 t. \quad 456. x = a \cos^2 t.$$

$$y = a(1 - \cos t). \quad y = p \tan t. \quad y = a \sin^2 t$$

$$457. \quad x_c = \frac{a^2 - b^2}{a} \operatorname{ch} t$$

$$y_c = -\frac{a^2 + b^2}{b} \operatorname{sh}^3 t.$$

$$458. \quad x_c = t - a \operatorname{sh} \frac{t}{a} \operatorname{ch} \frac{t}{a}.$$

$$y_c = 2a \operatorname{ch} \frac{t}{a}.$$

$$459. \quad x_c = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t$$

$$y_c = -\frac{a^2 + b^2}{a} \sin^3 t.$$

$$460. \quad x_c = -a \cos t (1 + 2 \sin^2 t).$$

$$y_c = a \sin t (1 + 2 \cos^2 t).$$

$$461. \quad x_c = p + \frac{3}{2} p \cot^2 t.$$

$$y_c = -p \cot^4 t.$$

$$462. \quad x_c = \frac{a^4 + 3t^4}{2t^3}$$

$$y_c = \frac{3a^4 + t^4}{2a^2 t^2}$$

$$463. \quad r_c = \frac{t(a^4 - t^4)}{2a^4}$$

$$y_c = \frac{5t^4 + 3a^4}{6a^2 t^2}$$

$$464. \quad r_c = a \cos t.$$

$$y_c = a \sin t.$$

$$465. \quad x_c = ae^{-t} (\cos t + \sin t).$$

$$y_c = ae^{-t} (\sin t - \cos t).$$

$$466. \quad x_c = 2a (t \cos t - \sin t).$$

$$y_c = 2a (t \sin t + \cos t).$$

$$467. \quad x_c = -4at^3 \left(t^2 - \frac{5}{3} \right)$$

$$y_c = 5a (1 - t^2).$$

$$468. \quad r_c = \frac{a}{3} (2 \cos t - \cos 2t).$$

$$y_c = \frac{a}{3} (2 \sin t + \sin 2t).$$

$$469. \quad x_c = \frac{a}{2} (3 \cos t + \cos 3t).$$

$$y_c = \frac{a}{2} (3 \sin t + \sin 3t).$$

$$470. \quad x_c = \frac{2a \cos^3 t}{3(1 + \cos 2t)}, \quad y_c = \frac{2a \sin^3 t}{3(1 + \cos 2t)}.$$

$$471. \quad x_c = \frac{a}{2} - \frac{a}{6} (2 \cos t - \cos 2t), \quad y_c = \frac{a}{6} (2 \sin t - \sin 2t).$$

472. Найти поверхность, которая пересекает ортогонально к тому конусу $x^2 + y^2 = \alpha z^2$ (α — переменный параметр) и проходит через линию $z = h$, $x^2 + z^2 = 2ax$.

473. Найти поверхность, которая пересекает ортогонально к тому параболоиду $x^2 + y^2 = 2\alpha z$ (α — перем. параметр) и проходит через линию $x = h$, $z^2 = 2py$.

474. Найти поверхность, которая пересекает ортогонально к тому сферу $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ (α — перем. параметр) и проходит через линию $x = h$, $y^2 + z^2 = r^2$.

475 Найти поверхность, касательные плоскости которой
-ны прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$, и которая проходит через окруж-
ность $x = h, y^2 + z^2 = 2a$.

476. Найти поверхность, касательные плоскости которой
проходят через точку $(b, 0, b)$ и которая проходит через окруж-
ность $y = h, x^2 + z^2 = a^2$.

477. Найти поверхность, нормали которой лежат в одной
плоскости с прямою $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ и которая проходит через окруж-
ность $x^2 + y^2 = 2ax, z = h$.

ОТДЕЛ VI.

Определенные интегралы.

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx.$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \log \sin x dx.$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x dx$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin x dx$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$7. \int_0^1 \frac{x \log x dx}{1-x^2}$$

$$8. \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$9. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \cdot \log \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

$$10. \int_0^1 \frac{x^m \log x dx}{1+x^2}, (m > -1)$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx, n \text{ целое положит.}$$

$$12. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx \cos x}{\sin x} dx \quad (n \text{ целое полож.})$$

$$13. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \cos nx dx \quad n \text{ цел.}$$

$$14. \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\log x} dx, a > 0, b > 0.$$

$$15. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ax} \frac{e^{-bx}}{x} \cos nx dx \quad a > 0, b > 0.$$

$$16. \int_0^b e^{-\frac{c}{x}} \sin mx dx \quad (a > 0, b > 0)$$

$$17. \int_0^b \left(e^{-\frac{a}{x}} - e^{-\frac{b}{x}} \right)^2 dx \quad (a > 0, b > 0)$$

$$18. \int_0^b \log \frac{b^2 + x^2}{c^2 + x^2} \cdot \cos ax dx \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

$$19. \int_0^b \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$20. \int_0^{\pi} e^{a \cos x} \cos (a \sin x) dx, \quad a > 0.$$

$$21. \int_0^{\pi} \frac{\sin bx \cdot \sin cx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

$$22. \int_0^x \frac{\cos dx \cdot \cos cx}{e} e^{-ax} dx \quad (a > 0).$$

$$23. \int_0^x \frac{\cos ax dx}{(1+x^2)^2}, \quad a > 0$$

$$24. \int_0^x \frac{\cos ax dx}{(1+x^2)^2}, \quad a > 0$$

$$25. \int_0^x \frac{\arctg ax \cdot dx}{x(1+x^2)}$$

$$26. \int_0^x \frac{\arctg ax \cdot dx}{x(1+b^2x^2)}, \quad a > 0, b > 0$$

$$27. \int_0^{\pi} \frac{\sin(atgx)}{\tg x} dx, \quad a > 0.$$

$$28. \int_0^1 \arctg (a\sqrt{1-tg^2x}) dx.$$

$$29. \int_0^1 \frac{\log(x^2 + a^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad a > 0.$$

$$30. \int_0^1 \frac{\log(1 - a^2x^2)}{1 + b^2x^2} dx, \quad a > 0, b > 0.$$

$$31. \int_0^1 \frac{\log(1 + a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$32. \int_0^{\pi} \frac{\arctg (a \sin x)}{\sin x} dx.$$

$$33. \int_0^{\pi} \frac{\log(1 + a \cos x)}{\cos x} dx, \quad 0 < a < 1$$

$$34. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1 + a \sin x)}{\sin x} dx, 0 < a < 1. \quad 35. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2} dx, a > 0, b > 0.$$

$$36. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx (a > 0, b > 0)$$

$$37. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos ax \cos bx}{x^2} dx, b > a > 0.$$

$$38. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(ax)}{x} dx, a > 0.$$

$$39. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 ax}{x} dx, a > 0.$$

$$40. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 ax}{x^4} dx, a > 0.$$

$$41. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin ax \cos bx \cos cx}{x} dx (a > 0, b > 0, c > 0).$$

$$42. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx, a > 0, b > 0.$$

$$43. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin ax \sin bx \cos cx}{x^4} dx, (a > 0, b > 0, c > 0).$$

$$44. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin ax \sin bx \cos cx}{x^4} dx, a \geq b \geq c > 0. \quad 45. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 ax}{x^4} dx, a > 0.$$

$$46. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 ax}{x^4} dx, a > 0. \quad 47. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin ax}{x^4} dx, a > 0$$

$$48. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ax} \frac{\sin bx \cos cx}{x^4} dx, (a > 0, b > 0, c > 0).$$

$$49. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ax} \frac{\sin^2(bx)}{x} dx (a > 0, b > 0)$$

$$50. \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin^2 bx}{x^3} dx, \quad a > 0, b > 0. \quad 51. \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin^2 bx}{x^3} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$52. \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin bx \sin cx}{x^3} dx \quad (a > 0, b \geq c > 0).$$

$$53. \int_0^{\infty} \frac{\log(1 + a^2 x^2) \cdot \operatorname{arctg} bx}{x^3} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$54. \int_0^{\infty} \frac{\log(1 + a^2 x^2) \log(1 + b^2 x^2)}{x^4} dx, \quad a > 0, b > 0.$$

$$55. \int_0^{\pi} \log(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

$$56. \int_0^{\pi} \cos nx \cdot \log(1 - 2a \cos x + a^2) dx \quad (n \text{ цел. пол.}).$$

$$57. \int_0^{\pi} \frac{\log \sin x dx}{1 - 2a \cos x + a^2}. \quad 58. \int_0^{2\pi} \frac{\sin mx dx}{1 - 2a \cos x + a^2} \quad (m \text{ целое}).$$

$$59. \int_0^{\pi} \frac{x dx}{1 + x^2} \cdot \frac{\sin bx}{1 - 2a \cos bx + a^2}, \quad b > 0. \quad 60. \int_0^{\pi} \frac{1 - a \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx.$$

$$61. \int_0^{\pi} \frac{x dx}{1 - 2a \cos 2x + a^2}. \quad 62. \int_0^{2\pi} \frac{x^2 \sin x dx}{1 - 2a \cos x + a^2}.$$

$$63. \int_0^{2\pi} \frac{x \cos mx dx}{1 - 2a \cos x + a^2} \quad (m \text{ цел. пол.}).$$

$$64. \int_0^{\pi} \frac{\sin mx \sin x dx}{1 - 2a \cos x + a^2} \quad (m \text{ цел. пол.}).$$

$$65. \int_0^{\pi} \frac{\log \sin x dx}{1 - a \cos x}, \quad a < 1. \quad 66. \int_0^{\pi} \frac{\cos mx dx}{1 - a \cos x} \quad (m \text{ цел. пол.}, a < 1).$$

$$67. \int_1^{2\pi} \frac{\sin mx dx}{1 - a \cos x} \quad (m \text{ цел. пол.}, a < 1). \quad 68. \int_1^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 - a \cos x}, \quad a < 1.$$

$$69. \int_0^{\pi} \log(1 - a \cos x) dx, \quad a < 1.$$

$$70. \int_0^{\pi} (\cos nx \log(1 - a \cos x)) dx, \quad a < 1.$$

$$71. \int_0^{\pi} \frac{x dx}{1 - a \cos 2x}, \quad a < 1. \quad 72. \int_0^{2\pi} \frac{x \cos mx dx}{1 - a \cos x} \quad (a < 1, m \text{ цел. пол.}).$$

$$73. \int_1^{2\pi} \frac{x^2 \sin x dx}{1 - a \cos x}, \quad a < 1. \quad 74. \int_1^{\pi} \frac{\sin mx \sin x dx}{1 - a \cos x} \quad (a < 1, m \text{ цел. пол.}).$$

$$75. \int_0^{\pi} \frac{x \sin bx dx}{(1 - x^2)(1 - a \cos bx)} \quad (a < 1, b > 0).$$

$$76. \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 - a \cos bx)}, \quad a < 1, b > 0.$$

$$77. \int_0^{\pi} \frac{x^{a-1} \log x dx}{1+x} \quad (0 < a < 1). \quad 78. \int_0^{\pi} \frac{x^a \log^2 x dx}{1+x} \quad (0 < a < 1).$$

$$79. \int_0^{\pi} \frac{x^k \log x dx}{1+x^m} \quad \left(m > 0, 0 < \frac{k+1}{m} < 1 \right)$$

$$80. \int_0^{\pi} \frac{x^{a-1} dx}{x+b} \quad (0 < a < 1, b > 0).$$

$$81. \int_0^{\pi} \frac{x^{a-1} \log x dx}{x+b}, \quad 0 < a < 1, b > 0.$$

$$82. \int_0^{\pi} \frac{x^{a-1} \log x dx}{x^2 + b^2} \quad (0 < a < 1, b > 0). \quad 83. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (m > 1).$$

$$84. \int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx \text{ при } \frac{m+1}{n} = k \text{ (целому полож.), } p = -1, \\ n \neq 0.$$

$$85. \int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx \text{ при } \frac{m+1}{n} = p + k \text{ (целому полож.), } \\ 0 < p < 1, n \neq 0.$$

$$86. \int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{(1-x^n)^p}, \quad 0 < p < 1.$$

$$87. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^n x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}, \quad -1 < n < +1.$$

$$88. \int \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} bx} dx, \quad -b < a < +b, \quad b > 0).$$

$$89. \int \frac{x \operatorname{sh} ax dx}{\operatorname{ch} bx} \quad (-b < a < +b, \quad b > 0).$$

$$90. \int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{(1+ax)(1-x)^n} (0 < n < 1, 1+a > 0).$$

$$91. \int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^{2p-1} x dx \quad (0 < p < 1).$$

$$92. \int_a^{\frac{1}{b}} \frac{x^k dx}{x^m} \quad \left(a > 0, b > 0, 0 < \frac{k+1}{m} < 1 \right).$$

$$93. \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{x^k dx}{a + bx^m} \quad \left(a > 0, b > 0, 0 < \frac{k+1}{m} < 1, p \text{ цел. полож.} \right).$$

$$94. \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{x^k dx}{(1+x^m)^p}.$$

$$95. \int_0^{\infty} \frac{x^k dx}{1+x^m}.$$

$$96. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2m-1} x \cos^{2n-1} x dx}{(a \cos^2 x + b \sin^2 x)^{m+n}} (a > 0, b > 0, m > 0, n > 0).$$

$$97. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot x dx}{a + \cos x^a} \quad (a > b > 0, n > 0).$$

$$98. \int_0^1 \frac{x^l dx}{1-x^m} \quad (m > 1, l+1 > 0).$$

$$99. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx \quad (p > 0, q > 0)$$

$$100. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^n} x^k dx \quad (n > 0, k+1 > 0)$$

$$101. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-x} dx. \quad 102. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-x} dx. \quad 103. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^2 \cdot \cos 2ax dx.$$

$$104. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2 \cdot \cos 2ax dx.$$

$$105. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-x} dx, \quad n > 1.$$

$$106. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-x} dx, \quad n > 1$$

$$107. \int_0^1 \log \Gamma(x) dx.$$

$$108. \int_0^1 \log \Gamma(ax) dx, \quad a > 0.$$

$$109. \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x} \int_0^x \frac{dx}{1-\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$110. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^n} x^{m-1} dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^n} \cdot x^{n-m-1} dx \quad (n > 0, 0 < m < n).$$

$$111. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x}, \quad 0 < p < 1.$$

$$112. \int_0^1 \frac{dx}{1-x^n} \cdot \int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{1-x^n}, \quad n > 2.$$

$$113. \int_0^1 \sqrt{1-x^n} dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^n}} dx, \quad n > 2.$$

$$114. \int_0^{\pi} \frac{\cos \mu x dx}{\operatorname{ch} x}.$$

$$115. \int_0^{\pi} \frac{\cos \mu x dx}{(\operatorname{ch} x)^{2n+1}}.$$

$$116. \text{ Доказать, что } \int_0^{\pi} (\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x \cos \varphi)^n d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x \cos \varphi^{n+1}}.$$

$$117. \text{ Доказать, что } \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cos \varphi) d\varphi = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

$$118. \text{ Полагая } J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cos \varphi) d\varphi, \text{ найти } \int_0^1 J_0(ax) e^{-bx} dx$$

(a > 0, b > 0).

119. Доказать, что интеграл $J_0(x)$ прим. 118 удовлетворяет дифф. уравнению $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$.

120. Зная, что $J_0(x)$ прим. 118 удовлетворяет дифф. уравнению примера 119, найти $\int_0^1 x J_0(ax) J_0(bx) dx$ при $b^2 > a^2$.

$$121. \text{ Из предм. примера найти } \int_0^1 x J_0^2(ax) dx.$$

$$122. \int_0^1 x J_0(ax) dx \text{ (см. 118 и 119).}$$

$$123. \text{ Найти } \int_0^{\infty} \frac{x J_0(x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad a > 0 \text{ (см. 118 и 119).}$$

$$124. \text{ Найти } \int_0^{\infty} \frac{J_1(x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (a > 0), \text{ полагая } J_1(x) = -J_0'(x) \text{ (носит } J_0(x) \text{ см. 118 и 119).}$$

125. Доказать, что дифф. уравн. $y'' + \operatorname{coth} x \cdot y' - l(l+1)y = 0$ удовлетворяется следующими интегралами:

$$\int_0^{\pi} (\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x \cos \varphi)^{-l} d\varphi, \quad \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \cos \varphi)^{l+1}}.$$

126. Доказать, что дифф. уравн. $(1-x')y'' - 2xy' + \left(n + \frac{1}{4}\right)y = 0$ (n целое полож.) удовлетворяется следующим интегралом:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{V x - \cos \varphi}, \quad x > 1.$$

127. Доказать, что дифф. уравн. $(1-x)y'' - 2xy' - \left(x' + \frac{1}{4}\right)y = 0$ удовлетворяется интегралами:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{V \operatorname{ch} \varphi - x}, \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{1 - \operatorname{ch} \varphi + x}.$$

128—132. Найти с помощью преобразования в полярные координаты следующие двукратные интегралы:

$$128. \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2 - y^2 + n^2 - 2nm - \pi} dx dy, \quad 129. \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} e^{-\pi^2 - \pi^2 - y^2 + 2\pi x + \pi^2} dx dy.$$

$$130. \int_0^1 \int_0^b \frac{dx dy}{(c^2 + x^2 + y^2)^2}.$$

$$131. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2 (x^2 + y^2 + a_1^2)^2}, \quad (a > 0, a_1 > 0).$$

$$132. \iint V \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy \text{ при } x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$$

133. Доказать, что при $a^2 + b^2 = 1$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{a^2 \cos^2 v + b^2 \cos^2 u}{V (1 - a^2 \sin^2 v) (1 - b^2 \sin^2 u)} du dv = \frac{\pi}{2}.$$

ОТДЕЛ VII.

Ряды.

1 40. Разобрать вопрос о сходимости для бесконечных рядов, общие члены которых u_n имеют следующие выражения:

$$1. (-1)^n \sin \frac{\pi x}{n}, \quad 2. (-1)^n \sin \frac{\pi x}{n^2}, \quad 3. (-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$4. n^k \cdot \operatorname{tg}^p \left(\frac{\pi x}{n^k} \right), \quad 5. n^k \cdot \log^p \left(1 + \frac{x}{n^k} \right), \quad 6. n^k \cdot \left[\left(1 + \frac{a}{n^k} \right)^m - 1 \right]^p.$$

$$7. \left[\left(\frac{n^k + a}{n^k + b} \right)^m - 1 \right]^p, \quad 8. n^k \cdot \left(\frac{n^k + a}{n^k + b} \right)^p, \quad 9. n^k \cdot \left(a^{\frac{1}{n^k}} - 1 \right)^p.$$

$$10. \sqrt[p]{n^p + 1} - n, \quad 11. \left[\sqrt[p]{n^p + 1} - \sqrt[p]{n^p + 1} \right] n.$$

$$12. \sqrt[n^2 + an + b]{} - \sqrt[n^2 + a_1 n + b_1]{}.$$

$$13. \sqrt[n^2 + an + b]{} - \sqrt[n^2 + a_1 n + b_1]{}.$$

$$14. e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}.$$

$$15. \log \frac{n+1}{n-1} - \frac{a}{n}.$$

$$16. a \sin \frac{\pi}{n} - b \log \frac{n+1}{n}.$$

$$17. n \left[\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \right].$$

$$18. \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{n^k} - \sin \frac{\pi x}{n^k} \right)^p.$$

$$19. \log \cos \left(\frac{\pi}{n^p} \right).$$

$$20. a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}$$

$$21. \sin \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n+1}.$$

$$22. \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} - 1 \right)^p.$$

$$23. \left(\operatorname{sh} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right)^p.$$

$$24. \left[\operatorname{arctg} \frac{\pi}{n} - \operatorname{arctg} \frac{\pi}{n+1} \right] \sqrt[n]{n}.$$

$$25. \left[\operatorname{arc} \sin \frac{\pi}{n} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right] \cdot n.$$

А.
и.

†

26. $\log\left(\frac{ne^{\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n^2+1}}\right)$ 27. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n+1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n+2} \frac{x^{2n+1}}{2n+3}$
28. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{n^p}$ 29. $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{(1+a)(2+a)\dots(a+n)} \cdot n^p$
30. $\left[\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)}\right]^p, \quad b > a.$
31. $\frac{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\dots(nb+1)} \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad (a > 0, b > 0).$
32. $\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \cdot \frac{1}{n^p} \cdot 2^{2n}$ 33. $\left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}\right]^p$
34. $\left[\frac{a(a+1) \cdot (a+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}\right]^p, \quad 0 < a < 1.$
35. $\frac{a(a+1) \cdot (a+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{1}{n^p}, \quad a > 0.$
36. $\left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right]^p \cdot \frac{1}{n^p}$
37. $\left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}\right]^p \cdot \frac{1}{n^p}$
38. $\frac{\left(a^2 + \frac{1}{4}\right) \left(a^2 + \frac{9}{4}\right) \dots \left(a^2 + \frac{(2n-1)^2}{4}\right)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^2}.$
39. $\frac{(2a+1)(2a+3)(2a+5)\dots(2a+4n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n \cdot (2a+2)(2a+4)\dots(2a+2n)} \cdot 2^{2n} \quad (a > 0).$
40. $\frac{(2n-2-a)(2n-4-a)\dots(2-a) \cdot a(a+1)(a+3)\dots(a+2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}$

(случаи a пол. четного и отриц. нечетного—исключаются).

41—55. Нижеследующие функции разложить в ряды по целым положит. степеням x с указанием закона составления коэффициентов и границ сходимости ряда:

41. $\frac{5-x}{12-x-x^2}$ 42. $\frac{2-x-x^2}{(1-x)^2}$ 43. $\frac{x}{\sin x}$ 44. $x \cot x$

45. $\frac{x^2}{\operatorname{ch} x - 1}$.

46. $\frac{x}{\log(1+x)}$.

47. $\frac{x}{e^x - 1}$.

48. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{2}}{1-x^2}$.

49. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}$.

50. $\frac{1}{3} \log \frac{1+2x+x^2}{1-x+x^2}$.

51. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x$.

52. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{1+x\sqrt{3+x^2}}{1-x\sqrt{3+x^2}}$.

53. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{5}}{1-x^2}$.

54. $\operatorname{arctg}(x+1)$.

55. $\log(1-x+x^2)$.

56—73. Определять суммы следующих рядов с указанием пределов сходимости ряда:

56. $\frac{1}{3} + \frac{x}{1 \cdot 4} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 5} + \dots + \frac{x^n}{n! \cdot (n+3)} + \dots$

57. $x - \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$

58. $\frac{x^3}{1 \cdot 3} - \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(n-2)n} + \dots$

59. $\frac{1}{3!} + \frac{2x^2}{5!} + \frac{3x^4}{7!} + \dots + \frac{nx^{2n-2}}{(2n+1)!} + \dots$

60. $\frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{4} x^4 + \dots + \frac{n}{n+1} x^{n+1} + \dots$

61. $\frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{2} x^4 + \frac{3}{5} x^6 + \dots + \frac{n}{n+2} x^{n+2} + \dots$

62. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1} - \frac{x^{2n+2}}{3n+2} \right) + \dots$

63. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^7}{5 \cdot 7} + \dots$
 $+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n-2)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$

64. $\frac{1}{3!} x^2 - \frac{3 \cdot 4}{5!} x^3 + \frac{5 \cdot 6}{7!} x^4 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{(2n-1) \cdot 2n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots$

$$65. x + \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{5} x^3 + \frac{1}{7} x^4 + \dots + (-1)^n \left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \right] + \dots$$

$$66. x - \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{5} x^3 - \frac{1}{7} x^4 + \dots + (-1)^n \left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \right] + \dots$$

$$67. \frac{x^4}{1 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 6} + \frac{x^6}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n-3) 2n} + \dots$$

$$68. x \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 + \dots + \left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{x^{4n+2}}{4n+2} + \frac{x^{4n+4}}{4n+4} \right) + \dots$$

$$69. \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-7)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-6)} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$70. a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

при условии: $\alpha a_{n+2} + \beta a_{n+1} + \gamma a_n = 0$ для $n \geq 0$.

$$71. 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots + a_n x^n + \dots$$

при $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ($n \geq 0$).

$$72. a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \text{ при условии:}$$

$(n+2) \alpha a_{n+2} + (n+1) \beta a_{n+1} + n \gamma a_n = 0$ для значений $n \geq 1$.

$$73. 1 + 2x - x^2 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{2}{5} x^5 + \dots + a_n x^n + \dots \text{ при } (n+2) a_{n+2} +$$

$$+ (n+1) a_{n+1} + n a_n = 0 \text{ для значений } n \geq 0.$$

74—90. Найти суммы следующих численных рядов:

$$74. 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \left[\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} \right] + \dots$$

$$75. 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \left[\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right] + \dots$$

$$76. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right] + \dots$$

$$77. 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{4n+1} + \dots$$

$$78. 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \left[\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} \right] + \dots$$

$$79. 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{6n+1} + \dots$$

$$80. 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \dots + (-1)^n \left[\frac{1}{6n+1} + \frac{1}{6n+5} \right] + \dots$$

$$81. \frac{3}{2 \cdot 4} - \frac{5}{4 \cdot 6} + \frac{7}{6 \cdot 8} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2n(2n+2)} + \dots$$

$$82. \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \dots$$

$$83. \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 8} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} + \dots$$

$$84. \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} + \dots$$

$$85. \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n(2n+1)} + \dots$$

$$86. \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \frac{1}{17 \cdot 21} + \dots + \frac{1}{(8n+1)(8n+5)} + \dots$$

$$87. \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{3}{5 \cdot 7} + \frac{5}{9 \cdot 11} - \dots + (-1)^n \frac{2n+1}{(4n-1)(4n+3)} + \dots$$

$$88. \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} - \frac{1}{15 \cdot 17} + \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} + \dots$$

$$89. \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \frac{1}{25 \cdot 31} + \dots + \frac{1}{(12n-1)(12n+7)} + \dots$$

$$90. \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{17 \cdot 19} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(6n-1)(6n+1)} + \dots$$

91. Доказать, что сумма ряда

$$\frac{C_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} + \frac{C_1}{(a+1)(a+2) \dots (a+k)} + \\ + \frac{C_2}{(2a+1)(2a+2) \dots (2a+k)} + \dots + \frac{C_n}{(na+1)(na+2) \dots (na+k)} + \dots$$

выражается интегралом

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} \int_0^1 (1-t)^{k-1} f(t^a) dt,$$

если

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots = f(x) \text{ при } |x| \leq 1.$$

92 118 На основании результата 91 найти суммы след. рядов:

$$92. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$$93. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}.$$

$$94. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)}.$$

$$95. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}.$$

$$96. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$$97. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n+1)(3n+2)}.$$

$$98. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(4n+2)}.$$

$$99. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$100. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.$$

$$101. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}.$$

$$102. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}.$$

$$103. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$104. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.$$

$$105. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}.$$

$$106. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}.$$

$$107. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}.$$

$$108. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}.$$

$$109. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$$110. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.$$

$$111. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{(4n+3)(4n+4)(4n+5)}.$$

$$112*. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$$113*. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$$114*. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.$$

$$115*. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.$$

$$116. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.$$

$$117. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

$$118. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

(В задачах, отмеченных *, коэффициент $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$ при $n = 0$ условно считается $= 1$).

119. Доказать, что сумма ряда

$$C_0 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}C_2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}C_3 + \dots$$

представляется опр. интегралом $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 \varphi) d\varphi$, если

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots = f(x) \text{ при } 0 < x < 1.$$

120. Доказать, что сумма ряда

$$C_1 + \frac{2}{3} C_3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} C_5 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} C_7 + \dots$$

равна опред. интегралу $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin \varphi) d\varphi$, если

$$C_1 x + C_3 x^3 + C_5 x^5 + \dots = f(x) \text{ при } 0 < x < 1.$$

121—134. На основании результатов 119—120 найти суммы следующих рядов:

$$121. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

$$122^*. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2n+1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

$$123^*. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

$$124^*. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

$$125^*. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}.$$

$$126^*. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

$$127^*. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}.$$

$$128^*. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

$$129. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

$$130^* \cdot \sum_0^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

$$131^* \cdot \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{a^n} \quad (a > 1),$$

$$132^* \cdot \sum_0^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{a^n} \quad (a > 1).$$

$$133^* \cdot \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \cdot \frac{1}{a^n} \quad (a > 1).$$

$$134^* \cdot \sum_0^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \cdot \frac{1}{a^n} \quad (a > 1).$$

(В задачах, отмеченных *, коэффициенты $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$ и $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$ при $n=0$ условно считаются = 1).

135. Доказать, что сумма ряда $\frac{C_0}{1^2} + \frac{C_1}{2^2} + \frac{C_2}{3^2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{n^2} + \cdots$ равна $-\int_0^1 f(x) \log x \, dx$, если $C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n + \cdots = f(x)$ при $|x| < 1$.

136—139. На основании результата 135 найти суммы следующих рядов:

$$136^* \cdot \sum_0^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

$$137^* \cdot \sum_0^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$138^* \cdot \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$139. * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{(2n+3)^2}$$

(Относ. * см. выше, при 134).

140—168. Разложить в тригонометрические ряды (ряды Фурье) следующие функции:

$$140. f(x) = -1 \text{ при } -c < x < 0, f(x) = +1 \text{ при } 0 < x < c.$$

$$141. f(x) = 0 \text{ при } -c < x < 0, f(x) = +1 \text{ при } 0 < x < c.$$

$$142. f(x) = x \text{ при } 0 < x < c. \quad 143. f(x) = x \text{ при } -c < x < +c.$$

$$144. f(x) = |x| \text{ при } -c < x < +c.$$

$$145. f(x) = 0 \text{ при } -\pi < x < 0, f(x) = x \text{ при } 0 < x < \pi.$$

$$146. f(x) = x \text{ при } 0 < x < \pi, f(x) = \pi \text{ при } \pi < x < 2\pi.$$

$$147. f(x) = x \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}, f(x) = \pi - x \text{ при } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

$$148. f(x) = bx \text{ при } -\pi < x < 0, f(x) = ax \text{ при } 0 < x < \pi.$$

$$149. f(x) = x^2 \text{ при } -\pi < x < +\pi. \quad 150. f(x) = x^2 \text{ при } 0 < x < 2\pi.$$

$$151. f(x) = x^3 \text{ при } 0 < x < \pi.$$

$$152. f(x) = -x^2 \text{ при } -\pi < x < 0, f(x) = x^2 \text{ при } 0 < x < \pi.$$

$$153. f(x) = 0 \text{ при } -\pi < x < 0, f(x) = x^2 \text{ при } 0 < x < \pi.$$

$$154. f(x) = c^2 - x^2 \text{ при } -c < x < c.$$

$$155. f(x) = x(c^2 - x^2) \text{ при } -c < x < c.$$

$$156. f(x) = (c^2 - x^2)^2 \text{ при } -c < x < +c.$$

$$157. f(x) = \sin x \text{ при } 0 < x < \pi.$$

$$158. f(x) = \sin x \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$159. f(x) = \cos x \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$160. f(x) = \cos x \text{ при } 0 < x < \pi. \quad 161. f(x) = x \sin x \text{ при } -\pi < x < \pi.$$

$$162. f(x) = x \cos x \text{ при } -\pi < x < \pi.$$

$$163. f(x) = \log \sin \frac{x}{2} \text{ при } 0 < x < 2\pi.$$

$$164. f(x) = \sin \mu x \text{ при } -\pi < x < \pi (\mu \text{ не целое}).$$

$$165. f(x) = \cos \mu x \text{ при } -\pi < x < \pi (\mu \text{ не целое}).$$

166. $f(x) = \sinh x$ при $-\pi < x < \pi$. 167. $f(x) = \cosh x$ при $-\pi < x < \pi$.

168. $f(x) = e^x$ при $-\pi < x < \pi$.

169—187. Задачи по исчислению конечных разностей.

169. Полагая $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + (n-1)^k$, вычислить S_k при $k = 3, 4, \dots, 9$.

170. Полагая $T_k = 1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \dots + (2n-1)^k$, вычислить T_k при $k = 2, 3, 9$.

Вычислить следующие суммы

$$171. 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + \dots + (2n-3) \cdot (2n-1).$$

$$172. 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + \dots + (2n-2) \cdot 2n.$$

$$173. 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k + 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (k+1) + \dots + (n-k-1) \cdot (n-k+2) \dots n.$$

$$174. \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{n(n+2)} + \dots$$

$$175. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} + \dots$$

$$176. \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{14}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{3n+5}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

$$177. \frac{10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{36}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \dots + \frac{2n^2 - 3n + 1}{n(n+2)(n+4)(n+6)} + \dots (n \text{ нечетное}).$$

$$178. \frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{n(n+4)(n+8)} + \dots$$

$$179. \frac{1^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{n^2}{(n-1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \dots$$

$$180. \frac{1^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{2^2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots - \frac{(-1)^{n-1} \cdot n^2}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)} + \dots$$

$$181. \frac{3}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{5}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \frac{7}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots + \frac{2n+1}{n(n+3)(n+6)} + \dots$$

$$182. \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{8}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \dots \\ + (-1)^{n-1} \cdot \frac{3n-1}{n(n+2)(n+4)} + \dots$$

Вычислить при помощи формулы Эйлера-Мавлорена следующие суммы с указанною степенью точности:

$$183. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \text{ с точн. до } \frac{1}{10^5}.$$

$$184. \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{99} \text{ с точн. до } \frac{1}{10^5}.$$

$$185. \frac{1}{100} + \frac{1}{103} + \frac{1}{106} + \dots + \frac{1}{397} \text{ с точн. до } \frac{1}{10^5}.$$

$$186. \frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + \frac{1}{\sqrt{102}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9999}} \text{ с точн. до } \frac{1}{10^5}.$$

$$187. \frac{1}{500 \lg 500} + \frac{1}{501 \lg 501} + \dots + \frac{1}{999 \lg 999} \text{ с точн. до } \frac{1}{10^5}.$$

(lg—знак натурального логарифма).

ОТВЕТЫ.

ОТДЕЛ I.

Высшая алгебра.

1. Рассмотреть $(1+i)^{4k}$.

2. Рассмотреть $(1+i)^{4k+2}$.

$$3. P_{n-1} = \frac{1 - a \cos b - a^n \cos nb + a^{n+1} \cos (n-1)b}{1 - 2a \cos b + a^2}.$$

$$Q_{n-1} = \frac{a \sin b - a^n \sin nb + a^{n+1} \sin (n-1)b}{1 - 2a \cos b + a^2}.$$

Составить $P_{n-1} + i Q_{n-1}$.

4. Положить $x-1$ в разложении выражения $\frac{x^n-1}{x-1}$ на множители 2-й степени (случай n нечетного и случай n четного).

$$5. \frac{x^5-1}{x^2-1} = (x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

$$6. \frac{x^6+1}{x^2+1} = (x^2-x\sqrt{3}+1)(x^2+x\sqrt{3}+1).$$

$$7. \frac{x^9-1}{x^3-1} = \left(x^2-2x \cos \frac{2\pi}{9} + 1\right) \left(x^2-2x \cos \frac{4\pi}{9} + 1\right) \left(x^2-2x \cos \frac{8\pi}{9} + 1\right).$$

$$8. \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} = \left(x^3 - 2x \sin \frac{\pi}{9} + 1 \right) \left(x^3 - 2x \cos \frac{5\pi}{9} + 1 \right) \left(x^3 - 2x \cos \frac{7\pi}{9} + 1 \right).$$

$$9. \pm (2 + 3i)$$

$$10. \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -1.$$

$$11. \pm \frac{1}{2} (\sqrt{3} + i), + \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}).$$

12. Искомая функция = 1. (Приложить формулу Лагранжа для интерполирования целой функции при условиях $f(-2) = -f(-1) = f(1) = f(2) = 1$).

$$13. -\frac{1}{40}(x^4 - 5x^3 - 36).$$

$$14. 5 - x.$$

15. $\frac{3}{16}(x-1)^4 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + 2$. Указание: производная функция имеет форму $A(x-1)^2(x+1)$.

$$16. \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}.$$

$$17. \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{1}{x^2}.$$

$$18. \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} - \frac{\frac{1}{2}}{x+2}.$$

$$19. \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{6}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-3}.$$

$$20. \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} - \frac{\frac{1}{2}}{x+2}.$$

$$21. \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{7}{2}}{x-3} + \frac{\frac{29}{2}}{x+3}.$$

$$22. \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^3+2x+2}.$$

$$23. \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^3+4x+5}.$$

$$24. \frac{-\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2-4x+5}.$$

$$25. \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^3+1}.$$

$$26. \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x^2+2x+3}.$$

$$27. \frac{x}{x^3+1} + \frac{1-x}{x^3-x+1}.$$

$$28. \frac{-5}{(x-1)^2} - \frac{3}{x+1} + \frac{3x+5}{x^2-x+1}.$$

$$29. \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^3+1}.$$

$$30. \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{3x-1}{(x^2-x+1)^2} - \frac{x+2}{x^2-x+1}.$$

$$31. \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^3} - \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{(x^2+1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

$$32. \frac{3}{x-1} - \frac{3x+2}{(x^2-x+1)^3} + \frac{7x-1}{(x^2-x+1)^2} + \frac{-2x+5}{x^2-x+1}.$$

$$33. -\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2} \\ x^2-x\sqrt{2}+1 + \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

$$34. \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2-x+2} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2-x-2}.$$

$$35. \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2} \\ x^2+x\sqrt{3}+1 + \frac{1}{x^2-x\sqrt{3}+1}.$$

$$36. \frac{\frac{1}{3}x}{x^3+3x+3} + \frac{-\frac{1}{3}x}{x^3+3x-3}.$$

$$37. \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2-2x-1} - \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+2x-1}.$$

$$38. \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{3} \\ x^2+1 + \frac{1}{x^2-x\sqrt{3}+1} + \frac{1}{x^2+x\sqrt{3}+1}.$$

$$39. (x-2)^3 (x^3+x-1) = 0.$$

$$40. (x-1) (x^2-x+1)^2 = 0.$$

$$41. (x-1)^3 (x^2+1)^2 = 0.$$

$$42. 1, 2, -2.$$

$$43. 1, 2, 3, -3.$$

$$44. 4, -3.$$

$$45. 2, -3.$$

$$46. 2, 5, -3.$$

$$47. 3, -2, -4.$$

$$48. 4, -\frac{1}{2}, -3.$$

49. $\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}$

50. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, 3.$

51. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, -2.$

52. $\frac{2}{3}, -1, -\frac{3}{2}.$

53. $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}.$

54. $\frac{3}{2}, -\frac{1}{5}.$

55. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}.$

56. $\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}.$

57. $3, -2, -4.$

58. $f_2 = 2x - 5, f_3 < 0$; корень $(-2, -1).$

59. Ряд из 2 функций; корень $(1, 2).$

60. $f_- = 35x - 12, f_3 > 0$; корни: $0, 1$ и $(1, 2).$

61. $f'_2 = -x - 4, f_2 < 0$; 2 корня: $(-2, -1)$ и $(1, 2).$

62. $f_3 = 5x - 8, f_3 > 0$; нет веществ. корней.

63. $f_3 = 566x + 9, f_3 > 0$. Три корня: $(-3, -2), (0, 1), (7, 8).$

64. $f_3 = 566x - 557, f_3 > 0$. Три корня: $(-2, -1), (1, 2), (8, 9).$

65. $f_3 = -13x + 1, f_3 < 0$. 2 корня: $(0, 1)$ и $(-6, -5).$

66. $f_3 = -13x + 14, f_3 < 0$. 2 корня: $(1, 2)$ и $(-5, -4).$

67. Двукратный корень $x = 1$ и корень $(1, 2).$

68. Двукратный корень $x = 2$ и корень $(2, 3).$

69. Двукратный корень $x = -2$ и корень $(-2, -1).$

70. Трехкратный корень $x = 2$ и корни: $(0, 1), (-2, -1).$

71. $f_3 = x^3 - 3x + 3$ не имеет веществ. корней; два корня: $(1, 2)$ и $(-3, -2).$

72. $f_4 = -65x^2 - 101x - 55$ не имеет веществ. корней; два корня: $(-3, -2), (-1, 0).$

73. $f_4 = -65x^2 + 29x - 19$ не имеет веществ. корней; два корня: $(0, 1), (-2, -1).$

74. $f_4 = -65x^3 - 231x - 221$ не имеет веществ. корней; два корня: $(-2, -1), (-4, -3).$

75. $\frac{1}{2} \left\{ \sqrt[4]{27-1} - \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} - 1 \right\}.$

$$76. \quad 1,7\sqrt[4]{6} - 2,4\sqrt[4]{6} - 3,8\sqrt[4]{6} - 6,6.$$

$$77. \quad \frac{1}{22} \sqrt[4]{13} - 3\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{25}.$$

$$78. \quad \frac{1}{34} \sqrt[4]{(14 + 9\sqrt{2})\sqrt{9}} - (4 - 5\sqrt{2})\sqrt[4]{3} + 6\sqrt[4]{2}.$$

$$79. \quad \frac{p}{q}, \quad 80. \quad 2\frac{p^2}{q^2}, \quad 81. \quad -3, \quad 82. \quad \frac{2p}{q}.$$

$$83. \quad 2, \quad 84. \quad -\frac{8}{7}, \quad 85. \quad \frac{20}{9}, \quad 86. \quad \frac{13}{11}.$$

$$87. \quad \text{Вещ. корень} = 2 + \sqrt{-2 + 13} - \sqrt{-2 - 13}.$$

$$88. \quad \text{Корни: } 1, - (1 - 2\sqrt{2} \sin 15^\circ) = 0,2679, \\ - (1 + 2\sqrt{2} \cos 15^\circ) = -3,7321.$$

$$89. \quad \text{Корни. } 2,605; \quad 3,382; \quad 0,723.$$

$$90. \quad \text{Корни } \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, \quad 91. \quad \text{Корни: } 1 + \sqrt{2}, \\ -3 \pm \sqrt{10}.$$

$$92. \quad \text{Корни: } \frac{5 + \sqrt{21}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \quad 93. \quad \text{Корни. } \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{11}}{2}.$$

94. Разлагается на 2 квадр. уравнения:

$$x^4 + x^2 \left[1 + \sqrt{21} - 3 \right] + \left[\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3} + 1}} \right] = 0.$$

$$95. \quad x^2(x^2 + 2)(x^2 + x + 2), \quad 96. \quad (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 3).$$

$$97. \quad (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1).$$

98. Уравнение с 16-ми степенями корней:

$$x^{16} + 8.00455_{-10} x^8 + 6.03159_{-20} x^4 - 7.66096_{-30} = 0.$$

$$\text{Корни: } 0,7504; \quad 0,1785; \quad 0,0711.$$

99. Уравнение с 16-ми степенями корней

$$x^{16} + 8.28432_{-10} x^8 + 9.45215_{-20} x^4 + 3.78576_{-30} = 0.$$

Корни 0,7-12; 0,2805; 0,1049

100. Уравнение с 64-ми степенями корней

$$1,85412 \cdot x^{64} + 6,55254 \cdot x^{32} + 1,12864 \cdot x - 1,93792 = 0$$

Корни 0,8310; 0,3612, 0,2796, 0,0282.

101. Корни: $a, b, -(a+b)$.

102. $x = a, x = b, x^2 = x(a+b), a^2 + ab + b^2 = 0$.

103. $k = 7$ **104.** $t = 1, t = 2 \pm 1/\sqrt{26}$.

ОТДЕЛ II.

Интегрирование функций.

Постоянные произвольные во всех ответах опущены.

$$1. -x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

$$2. \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \log \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{1-\sqrt{3}}$$

$$3. \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \quad 4. \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$5. \frac{1}{x} \log \left| \frac{1-x}{1+x} \right| - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$6. \frac{1}{80} \log \frac{x^2 - x - 2}{(x-1)^{10}(3x+2)^3}$$

$$7. \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{6} \log \frac{1-x^2}{1-x^4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{1-\sqrt{3}}$$

$$8. \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{6} \log \frac{1-x^2}{1-x^4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{1-\sqrt{3}}$$

$$9. \frac{1}{8} \log \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{8} \log \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{2} \log \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$10. \frac{1}{6} \log \frac{x}{x+3} + \frac{1}{2} \log \frac{x+2}{x-1} \quad 11. \log(x-1) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{x-1}$$

$$12. \lg(x-1) - \frac{1}{2} \lg(x^2 + 2x + 2).$$

$$13. \frac{1}{8} \log \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$$

$$14. \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

$$15. \frac{3}{8} \log \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 2} - \frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{7}}{2-x^2}$$

$$16. \frac{4x-3}{2(x-1)^2} + \log \left| \frac{x-1}{1+x^2} \right| - \operatorname{arctg} x.$$

$$17. \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}.$$

$$18. \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1}.$$

$$19. \frac{3}{8} \log(x-1) - \frac{1}{5} \log(x-2) + \frac{7}{12} \log(x-3) + \frac{29}{120} \log(x+3).$$

$$20. \frac{1}{12} \log \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 + 3x + 3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{3-x^2}$$

$$21. \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (x-2).$$

$$22. \frac{-1}{x-1} - \frac{1}{2} \log(x+1) + \frac{1}{4} \log(x^2 + 2x + 3)$$

$$23. -\frac{11x^2 - 18x + 13}{3(x-1)(x^2 - x + 1)} + \log(x-1) - \frac{1}{2} \log(x^2 - x + 1) - \\ - \frac{25}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$24. \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4\sqrt{3}} \log \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2}$$

$$25. \frac{1}{8} \log \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{8\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \\ - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

$$26. \frac{x^2 - 2}{3x^2 - x + 1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$27. \frac{3}{56y^2} - \frac{1}{24y^3} - \frac{1}{40y^5}, y = 2x - 1$$

$$28. -\frac{1}{2y^2} + \frac{2}{y^3} - \frac{3}{y^4} + \frac{9}{5y^5}, y = x + 2.$$

$$29. \frac{1}{3} \left[\frac{y^2}{2} + 5y - 10 \log y - \frac{10}{y} + \frac{5}{2y} - \frac{1}{3y^3} \right], y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$30. \frac{1}{13} \left[-\frac{8}{y} - 36 \log y - 54y - \frac{27}{2} y^3 \right], y = \frac{2x+3}{3x-2}.$$

$$31. \frac{1}{5y^2} + \frac{7}{4y^4} - \frac{7}{y^5} + \frac{35}{2y^3} - \frac{35}{y} - 21 \log y + 7y - \frac{y^2}{2}, y = \frac{x-1}{x}$$

$$32. \frac{1}{3y^3} + \frac{3}{y^2} - \frac{15}{y} - 20 \log y + 15y - 3y - \frac{y^3}{3}, y = \frac{x-2}{x-1}.$$

$$33. \frac{1}{3} \log(1+x^3), \text{ подстановка } y = x^3.$$

$$34. \frac{2}{3} \arctg x^6 - \frac{1}{6} \log(1+x^6), \text{ разложить на 2 интеграла и ввести в первом } x^6 = y, \text{ во втором } x^6 = z.$$

$$35. \log \frac{x^3}{x} + \frac{1}{y}, y = x^2. \quad 36. \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{1-x^6} + \log \frac{x^4}{1-x^4} \right], y = 1-x^2$$

$$37. \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{x^2+1} - \frac{1}{x^2} \right] - \log \frac{x^2}{x^2+1}, y = 1+x^2.$$

$$38. \frac{1}{2} \left[\arctg x^2 + \lg(1+x^4) \right], y = x^2. \quad 39. \frac{1}{6} \arctg x^6, y = x$$

$$40. \frac{1}{4} \arctg x^2 + \frac{1}{8} \log \frac{x^3}{x^2+1}, y = x^2.$$

$$41. -\frac{1}{6} \log(x^2+1) + \frac{1}{12} \log(x^4-x^2+1) + \frac{1}{21\sqrt{3}} \arctg \frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}, y = x^2$$

$$42. \frac{1}{4} \arctg x^4, y = x^4.$$

$$43. \frac{1}{6} \log \frac{x^2-1}{1-x^2-x^2+1} - \frac{1}{21\sqrt{3}} \arctg \frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}, y = x^2.$$

$$44. \frac{1}{5} \log \frac{x^5}{1+x^5}, y=x^5. \quad 45. -\frac{1}{13} \operatorname{arctg} \frac{2x^2+1}{13}, y=x^2.$$

$$46. \frac{1}{6} \log \frac{x^6-1}{x^6+1}, y=x^6. \quad 47. \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8} \log \frac{x^2-2}{x^2}, y=x^2.$$

$$48. \frac{1}{4} \log (x^4+3x^2+9), -\frac{1}{2} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x^2}{3} \frac{3}{3}, y=x^2.$$

$$49. \frac{2}{2x^2+2} \operatorname{arctg} x, y=x. \quad 50. -\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3, y=x^3.$$

$$51. \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4, y=x^4. \quad 52. \frac{1}{4} \log y + \frac{1}{4y}, y=1+x^4.$$

$$53. \frac{1+2x^6}{12(1+x^6)}, y=1+x^6. \quad 54. \frac{1}{4y} + \frac{1}{4} \lg \frac{y-1}{y}, y=1+x^4.$$

$$55. \frac{2}{312} \operatorname{arctg} \frac{2x^3-1}{13}, y=x^3.$$

$$56. \frac{1}{13} \operatorname{arctg} \frac{2x^2-1}{13} + \frac{1}{413} \log \frac{x^2+1}{x^2-1} \frac{3+1}{3+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2}.$$

$$57. \frac{-x}{4(x^2-3)^2} - \frac{x}{24(x-3)} - \frac{1}{48} \frac{1}{3} \log \frac{x^2-1}{3} \frac{5}{3} \quad \text{Начать с}$$

интегрирования по частям.

$$58. \frac{x^3}{4(x+2)^2} - \frac{3x}{8(x+2)} + \frac{3}{16} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \quad \text{Два раза инте-}$$

грировать по частям.

$$59. \frac{x(1+3x^2)}{4(1+x^2)} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x. \quad \text{Разложить на 2 интеграла и брать}$$

по частям.

$$60. \frac{-x}{9(1+x^4)^3} - \frac{4x^3}{27(1+x^4)^2} - \frac{20x}{81(1+x^4)} - \frac{10}{243} \log \frac{x+1}{x^2-x+1} +$$

$$+ \frac{10}{81} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{3}. \quad \text{Три раза интегрировать по частям.}$$

$$61. \frac{-x^3}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x. \quad \text{Два раза по частям.}$$

62. $\frac{-x^7}{12(x^6+1)^2} - \frac{7x}{72(x^6+1)} + \frac{7}{72} \int \frac{dx}{1+x^6}$ (см. 24). Два раза по частям.

$$63. \frac{-x}{3x^3-1} + \frac{1}{9} \log \frac{x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Взять по частям.

$$64. \frac{-x}{4(x^4-1)} + \frac{1}{16} \log \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{8} \operatorname{arctg} x. \text{ По частям}$$

$$65. \frac{x(2x^2-3)}{2(x^3+1)} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x. \text{ По частям.}$$

$$66. \frac{x}{4(2x^2-1)} + \frac{3}{8\sqrt{2}} \log \frac{x\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}+1}. \text{ Заменить: } x^2-1 = (2x^2-1)-x^2.$$

67. $\frac{-x}{x^2+x-1}$, подстановка: $y = x + \frac{1}{x}$. Подобная подстановка прилагается к таким интегралам, в которых подынтегральный дифференциал $f(x)dx$ не меняется от замены x на $\frac{1}{x}$.

$$68. \frac{1}{2} \log \frac{x^2-x+1}{x^2+x-1}, y = x + \frac{1}{x}.$$

$$69. \frac{1}{3} \lg \frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}, y = x + \frac{1}{x}.$$

$$70. \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5}{x}}, y = x + \frac{1}{x}. \text{ Такая подстановка применяется в случае, если } f(x)dx \text{ не меняется от замены } x \text{ на } \frac{1}{x}.$$

$$71. \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3}{16} \log \frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}, y = x + \frac{1}{x}.$$

$$72. \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{x^2-x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}-1}, y = x + \frac{1}{x}.$$

$$73. \frac{1}{3} \log \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{6} \log \frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}, y = x + \frac{1}{x}.$$

$$74. \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2} - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x, y = x - \frac{1}{x}.$$

$$75. \quad \frac{1}{5} \log(x-1) + \log(x+1) = \frac{3}{5} \log(x^2-3x+1),$$

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

$$76. \quad \frac{1}{4} \log \frac{x-2x+1}{x-x-1}, \quad y = x - \frac{1}{x}.$$

$$77. \quad \frac{1}{2} \log \frac{x-x+2}{x-x+2-1}, \quad y = x + \frac{1}{x}.$$

$$78. \quad \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x}, \quad y = x - \frac{1}{x}.$$

$$79. \quad \frac{1}{2} \log(x+1) - \frac{1}{10} \log(x^5+1) +$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{x^2-5x+1}{x^2-5x+1}, \quad y = x - \frac{1}{x}.$$

$$80. \quad \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}, \quad y = x - \frac{1}{x}.$$

$$81. \quad \frac{1}{7} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{7}}{1-x}, \quad y = x - \frac{1}{x}.$$

$$82. \quad \log \frac{1}{x}, \quad y = x - \frac{1}{x}.$$

$$83. \quad \frac{-2}{1+x}, \quad y = x. \quad 84. \quad \frac{3}{x^3+1}, \quad y^3 = x^3-2.$$

$$85. \quad \frac{5}{36} (2x^2-5)(x^2+2)^{\frac{5}{2}}, \quad x^2+2 = y^3.$$

$$86. \quad \frac{1}{5} y^3 - y \operatorname{arctg} y, \quad x = y^5.$$

$$87. \quad \frac{3}{4} \log \sqrt[3]{x-1}, \quad \frac{9}{4} \log \sqrt[3]{x-1} \sqrt[3]{x-2} = \frac{3}{4\sqrt{7}}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{7}} = y^3.$$

$$88 \quad -2 \sqrt{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} = y^2.$$

$$89 \quad \frac{3}{2} \log \left| \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} \right|$$

$$\cdot \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x+1}}, \quad \frac{x-1}{x+1} = y^2.$$

$$90 \quad \frac{3}{4} \left[\frac{x+1}{1} \right]^{3/2} \cdot \frac{x+1}{x-1} = y^3.$$

$$91 \quad \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} = y, \quad \log \left| \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} \right|$$

$$\cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x+1}}, \quad \frac{1+x}{1-x} = y^2.$$

$$92 \quad \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} = y, \quad \frac{1}{4} \log \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x} + \sqrt{1-x}} =$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x}{1-x}}, \quad \frac{x-2}{x-1} = y^2.$$

$$93 \quad -4 \sqrt{\frac{x-1}{x}} = y, \quad \frac{x-1}{x} = y^2.$$

$$94 \quad \frac{3x-5}{16} \sqrt{\frac{x-1}{x-1}} = y.$$

$$95 \quad \frac{2-2x-1}{3} \sqrt{\frac{x-1}{x}} = y, \quad \frac{x-1}{x} = y^2.$$

$$96 \quad 5-x \sqrt{\frac{1-x}{1-x}} = y, \quad \frac{1-x}{1-x} = y^2.$$

$$97 \quad x-1 = 4\sqrt{x+1} = 2 \log \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{6}{\sqrt{5}} \log \frac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}+1} = \frac{15}{15}, \quad y = x-1.$$

$$98. 2\sqrt{2x-1} - 2\sqrt{x+2} + \sqrt{3} \log \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{3}}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3}} + \sqrt{3} \log \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}}.$$

Умножить числитель и знаменатель подынтегр. функции на $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+2}$, т. е. на выражение, сопряженное с знаменателем.

$$99. \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{3}x, \text{ преобразование пред. примера}$$

$$100. a \arcsin c + 1 - a \log |c| + 1 - a + a\sqrt{1-x^2}. \text{ (м. 118.)}$$

$$101. \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \log(x + \sqrt{x^2+1}) \text{ По частям.}$$

$$102. x^2\sqrt{x^2-a^2}, x^2-a=y^2.$$

$$103. \arcsin \frac{2x+1}{5}, y=x+\frac{1}{2} \quad 104. \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x-1}{15}, y=x-\frac{1}{3}$$

$$105. \log(x + \sqrt{x^2-3}), y=x+\sqrt{x^2+3}.$$

$$106. \frac{1}{\sqrt{3}} \log \left(x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 + \frac{7}{3}x - 3} \right), y = x - \frac{7}{6} \text{ пред.}$$

в виду 105

$$107. \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} - \frac{a}{2} \log(x + \sqrt{x^2+a}), \text{ по частям.}$$

$$108. \frac{1}{2}(a^2-x^2) - \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, \text{ по частям}$$

$$109. \left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} \right) \sqrt{x^2+2x+2} - \frac{5}{2} \log |x-1| + \sqrt{x^2+2x+2}.$$

По формуле с неопределенными коэффициентами

$$110. (x^2-x+1)\sqrt{x^2+2x+5}. \text{ Как 109.}$$

$$111. 2x\sqrt{1-x^2} - x + \arcsin \frac{2x-1}{15}. \text{ Как 109}$$

$$112. \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \right) \sqrt{2x^2-x-5} - \frac{23}{16\sqrt{2}} \log \left(2x - \frac{1}{2} \right)$$

, $1/2 - 1/2x - 1/3$), представить $\int R dx$ в виде $\int \frac{R}{\sqrt{R}} dx$

$$113. \frac{1}{3} (2 - x - x^2)^{3/2} - \frac{1}{3} (2x - 1) \sqrt{2 - x - x^2} - \frac{9}{16} \arcsin \frac{2x + 1}{3},$$

подстановка $x = \frac{1}{2} = y$ и далее, как 108.

$$114. \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1}, y = \frac{1}{x}.$$

$$115. \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 1}{(x - 1)^2} \sqrt{x^2 - 3x + 2}, y = \frac{1}{x - 1}.$$

$$116. \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x + 1}, x + 1 = \frac{1}{y}.$$

$$117. \frac{\sqrt{x^2 + x - 1}}{3(x + 2)} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + x - 1} - 3x}{x + 2},$$

$$x + 2 = \frac{1}{y}.$$

$$118. -\frac{2}{15} \sqrt{\frac{x + 2}{x + 1}} - \frac{8x^2 + 12x + 7}{(x + 1)^2}, x + 1 = \frac{1}{y} \text{ или } \frac{x + 2}{x + 1} = z^2.$$

$$119. = \frac{1}{2\sqrt{7}} \log \frac{5x + 4 - 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{R}}{x - 2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{3x - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{R}}{x - 2},$$

$R = x^2 + x - 1$ Разложить на 2 интеграла. $A \int \frac{dx}{x - 2} \sqrt{R}$

$$B \int \frac{dx}{x - 2} \sqrt{R}.$$

$$120. 2 \sqrt{\frac{x - 1}{x}} \sqrt{\frac{x}{x - 1}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{3x - 1 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{R}}{x - 1}.$$

$R = x^2 + x$ Разложить на 3 интеграла $A \int \frac{dx}{x \sqrt{R}}$

$$B \int \frac{dx}{x - 1} \sqrt{R} - C \int \frac{dx}{x - 1} \sqrt{R}.$$

$$121. \frac{x}{1 + x^2}, x^2 - 1 = y^2. \quad 122. \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt{2}}{1 - x}, x^2 - 1 = y^2.$$

$$123. \frac{1}{4} \log \frac{2 - \sqrt{3 - x^2}}{2 \sqrt{3 - x^2}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3 - x^2}}{2x}. \text{ Разложить на 2 ин-}$$

теграла $A \int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{R}}$ подстан. $3 - x^2 = y^2$ и $B \int \frac{dx}{x^2 - 1\sqrt{R}}$
(подстан. $3x^2 - 1 = y^2$).

$$124. -\frac{x\sqrt{1 - x^2}}{4(x^2 - 2)} - \frac{3}{8\sqrt{2}} \log \frac{1/2 \cdot \sqrt{x^2 - 1} - x}{1/2 \cdot \sqrt{x^2 - 1} + x}, x^2 - 1 = y^2.$$

$$125. -\frac{2x^3 + 3x + 1}{x^2 + 1} x^{-2} = 1 - y^2. \quad 126. \frac{-2}{1/x^2 - x + 1}, y^2 = x^2 - x + 1$$

$$127. \frac{6x - 2}{5\sqrt{1 - x - x^2}}, x - \frac{1}{2} = y \text{ и далее, как в 123.}$$

$$128. \frac{x}{1/x^2 - 2x - 1}, x - 1 = y \text{ и далее, как в 123.}$$

$$129. \frac{x^3}{3a^2(a^2 - x^2)}, a^2 x^2 - 1 = y^2.$$

$$130. -\frac{1}{9} \cdot \frac{16x^3 - 24x^2 - 30x - 14}{(x^3 - x - 1)^2}, x + \frac{1}{2} = y \text{ и далее, как 123}$$

$$131. \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x\sqrt{2 - 1/\sqrt{1 - x^2}}}{1/2 \cdot \sqrt{1 - x^2}} - \frac{x}{2\sqrt{1 - x^2}}, \text{ приводятся к 2}$$

интегралам: $A \int \frac{dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} + B \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$

$$132. -\frac{2}{17} \log \frac{5x - 4 - 2\sqrt{7 - 1/x^2 - x - 1}}{x - 2}$$

$$+ \frac{1}{5} \log \frac{3x - 3 - 2\sqrt{3 - 1/x^2 - x - 1}}{x - 1}, \text{ приводится к 2 интегралам:}$$

$$A \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{R}} + B \int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{R}}$$

$$133. \frac{\sqrt{1 - x^2}}{4(1 - x^2)} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x\sqrt{2}}, x^2 - 1 = y^2.$$

$$134. \frac{1}{165} \log \frac{1/5 \cdot 2x - 1 - 1/13 \cdot \sqrt{R}}{1/5 \cdot 2x - 1 + 1/13 \cdot \sqrt{R}}, R = x^2 - x - 2;$$

$$x - \frac{1}{2} = y \text{ и 123.}$$

$$135. \frac{2}{13} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-2x-1}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = 0$$

$$136. \frac{1}{2} \log \frac{5-3x-4}{x-1} - \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x-1}} \operatorname{arctg} \frac{1-3\sqrt{x-1}}{2x-1}$$

Разложить $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}$ на простейшие дроби.

$$137. \frac{1}{61\sqrt{7}} \log \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{R+2} + x-2}{17+3R-2} = \frac{2}{3} \log \frac{\sqrt{R+x+1}}{1-R-x-1}$$

$R = 3x^2 + 8x + 2$. Подстановка $x = \frac{2z-1}{z+1}$.

$$138. \frac{5}{21403} \log \frac{113+11R-131(1-x)}{113+1R-131(1-x)} = \frac{1}{195} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{113+1R}}{131(1-x)}$$

$R = 3x^2 - 4x + 3$. Подстановка $x = \frac{z-1}{z+1}$.

$$139. \frac{1}{1'5} \operatorname{arctg} \frac{1'5R}{1'5-1} - \frac{1'5}{217} \log \frac{1'7+1R-1'5(1-x)}{1'7+1R-1'5(1-x)}$$

$R = \dots$ Подстановка $x = \frac{y-1}{y+1}$

$$140. \frac{2}{3} \operatorname{arctg} u + \frac{1}{3} \log \frac{y-1}{y+1} = \sqrt{1+x^2}$$

$$141. \frac{1}{10} \log (y-1) - \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{2y+1}{1'5} = \sqrt{1+x^2}$$

$$142. \frac{1}{2} \log (R+x) - \frac{1}{1'5} \operatorname{arctg} \frac{2R-}{x1'5} = R = \sqrt{2-2x-1-x^2}$$

$$143. \frac{1}{4} \log \frac{R+x}{R-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{R}{x} = \sqrt{1-x^2} = 1-x^2$$

$$144. \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \log \sqrt{1-x} - \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \log (1-x^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{1'5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{x+1} - x \right] \text{ Подстановка } -1 = u \text{ и } x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} - u \right)$$

$$145. \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{R}{x\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \log \frac{x\sqrt{3} + 3 + R}{x\sqrt{3} - R}, R = \sqrt{1 - x^4} - 2, \\ 1 + 2x^4 = y^2$$

$$146. \frac{1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} \left[\operatorname{arctg} \frac{R}{x\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \log \frac{R - x\sqrt{2}}{R + x\sqrt{2}} \right], R = \sqrt{5} - 5x^2, \\ \text{Подстановка } 1 - x^2 = y^2.$$

$$147. \frac{x^3}{4\sqrt{1-x^4}} + \frac{1}{4} \operatorname{arcsin} x^2, y = x^2$$

$$148. -\frac{1}{4} \frac{(1+x^6)^{1/2}}{x^4}, x^{-6} + 1 = y^6.$$

$$149. \frac{1}{2} \log \frac{x}{y+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y-1}{\sqrt{3}}, y = \sqrt[3]{x^3-1}.$$

$$150. -\frac{1}{5} \frac{(2x^6+1)^{1/2}}{x^5}, x^{-6} + 2 = y^6.$$

$$151. \frac{1}{3} x^3 - 2x^3 \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\log \left(\sqrt{3-2x^3} + \sqrt{2} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4(3-2x^3)} - x}{x\sqrt{3}} \right], \\ 3x^3 - 2 = y^3$$

$$152. \frac{1}{4} x^2 \cdot R - \frac{1}{16} \log \frac{R+x}{R-x} - \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{R}{x}, R = \sqrt{1-x^4}, x^{-4} + 1 = y^4.$$

$$153. \frac{1}{105} (1-x^2)^{-1} (8+20x^2+35x^4), 1-x^2 = y^2.$$

$$154. \frac{1}{5} (1+x^4)^{-1/2}, 1+x^4 = y^4.$$

$$155. \frac{1}{455} (1-x^2)^{-1} (140x^4 - 126x^2 + 108x^0 - 81^1), 1-x^2 = y^2$$

$$156. \frac{x}{\sqrt{1+x^6}}, x^{-6} + 1 = y^6.$$

$$157. \quad x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} R^3 - \frac{5}{32} R - \frac{45}{256} R^3 + \frac{134}{1024} \log \left(r - \frac{1}{2} + \sqrt{R} \right) \right),$$

$R = 1 - x + x^2$. Подстановки $x - \frac{1}{2} = y$, $\frac{3}{4} y^2 + 1 = z^2$ приводят к

интегралу $\int \frac{z^3 dz}{(z^2 - 1)^2}$, который берется по частям.

$$158. \quad \frac{1}{2} \log \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x^2 - 1} \right), \quad x^2 = y$$

$$159. \quad -\frac{1}{2} \log \frac{1}{x^2} (2 - x^2 - 2\sqrt{1 - x^2 - x^4}), \quad x^2 = y.$$

$$160. \quad \frac{2}{3} (x + \sqrt{1 - x^2}), \quad y = x + \sqrt{1 - x^2}$$

$$161. \quad -\frac{1}{1/2} \log \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2} (x^2 - x + 1)}{(x + 1)^2}, \quad x + \frac{1}{x} = y.$$

См. указание задачи 67.

$$162. \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x^2 - x^2 + 1}}{x\sqrt{3}} \right), \quad x + \frac{1}{x} = y.$$

$$163. \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{1 + x^2} - x\sqrt{2}}{1 - x^2 - x\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{x} = y$$

$$164. \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} (x^2 + x^2 - 1)}{x^2 - 1}, \quad x + \frac{1}{x} = y.$$

См. указание зад. 70.

$$165. \quad -\frac{1}{9} \frac{x^4 + 5x^2 + 1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}, \quad x + \frac{1}{x} = y$$

$$166. \quad \frac{\sqrt{2}}{3} \arcsin \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{3} \log \frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} - 2x^2 - 3x - 2}{x - 1},$$

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

$$167. \quad 2\sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x}}, \quad y = x - \frac{1}{x}$$

$$168. \quad 2\sqrt{\frac{x^2 + x - 1}{x}}, \quad y = x - \frac{1}{x}$$

169. $x^3 \sqrt{1-x^4}$. Интеграл $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}$ взять по частям.

170. $x \sqrt{1-x^4}$. Интеграл $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^4}}$ взять по частям

171. $e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8} \right)$ По формуле с неопределенными коэффициентами.

172. $-\frac{1}{2} \left(\frac{3(x^2-1)}{\log 2} + \frac{18x}{\log^2 2} + \frac{54}{\log^3 2} \right)$. Как 171.

173. $\frac{1}{10} e^{-x} (3 \sin 3x - \cos 3x)$. Как 171.

174. $\frac{2}{13 - \frac{4}{3} \log^2 3} (6 - \log 3) \cos x - 3 \log 3 - 2) \sin x$.

Как 171.

175. $e^{-x^2} (-0,2x^2 - 0,24x - 0,176 \cos 2x - 0,4x^2 - 0,32x - 0,032 \sin 2x)$. Как 171

176. $\frac{1}{4} e^{-x} (0,6x + 0,48 \cos x - 1,2x - 0,36) \sin x + \left(\frac{3}{13} x - \frac{12}{169} \right) \cos 3x - \left(\frac{2}{13} x - \frac{5}{169} \right) \sin 3x$ Выразить $\sin x$ через $a \sin x + b \sin 3x$ и далее, как в предыдущей зад

177. $\frac{1}{3} \sin 3x \left(x^2 - \frac{5}{3} x \right) + \frac{1}{4} \cos 3x \left(3x^2 - \frac{5}{3} \right)$, по частям.

178. $\frac{1}{4} \left(-x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{6} \sin 6x \right)$. Приложить формулы, выражающие произведение синусов и косинусов через разность и сумму косинусов.

179. $\int \frac{1}{14} \cos 2x - \frac{1}{12} \cos 6x + \left(\frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{72} \sin 6x \right)$. Преобразовать, как в 178, и далее по частям.

180. $\frac{1}{6} \log \frac{\tan \frac{x}{2} - 3 - i\sqrt{6}}{\tan \frac{x}{2} - 3 + i\sqrt{6}} + \frac{x}{2}$

$$181. \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}, y = \cos x.$$

$$182. \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x, y = \operatorname{tg} x.$$

$$183. \frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x, y = \sin x. \quad 184. -\frac{1}{5} y' - \frac{1}{7} y^7, y = \cot x.$$

$$185. \frac{1}{3y^3} - \frac{1}{y} + 6y + \frac{4}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5, y = \operatorname{tg} x.$$

$$186. \frac{y^4}{4} + \frac{3}{2} y^2 + 3 \log y - \frac{1}{2y^2}, y = \operatorname{tg} x.$$

$$187. -y - \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5, y = \cot x.$$

$$188. \frac{1}{64y^4} - \frac{1}{8y^2} - \frac{3}{8} \log y + \frac{1}{8} y^2 + \frac{1}{64} y^4 \text{ при } y = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

или: $\frac{-\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} + \frac{3}{8} \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (введя в числитель

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и интегрируя $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^5 x} dx$ по частям).

$$189. y + y^3 + \frac{3}{5} y + \frac{1}{7} y^7, y = \operatorname{tg} x.$$

$$190. -\frac{1}{8y^2} + \frac{1}{2} \log y + \frac{1}{8} y^2 \text{ при } y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right),$$

или $\frac{\sin x}{2 \cos^3 x} + \frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$ (введя $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
как 188).

$$191. -y + \frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5, y = \cos x.$$

$$192. -\frac{1}{6} \sin^3 x \cos x - \frac{5}{24} \sin^5 x \cos x - \frac{5}{16} \sin^7 x \cos x + \frac{5}{16} x$$

(по формулам приведения) или:

$$-\frac{1}{32} \left\{ \frac{1}{6} \sin 6x - \frac{3}{2} \sin 4x - \frac{15}{2} \sin 2x - 10x \right\}, \text{ выражая } \sin^5 x$$

через вратные дуги).

$$193. y - y^3 + \frac{3}{5} y^5 - \frac{1}{7} y^7, y = \sin x.$$

$$194. \frac{1}{4} \sin x \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cos x - \frac{3}{8} x \\ \text{или } \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{3}{8} x, \text{ см. 192.}$$

$$195. \frac{1}{\sin x + 1 \cos x} + \frac{7 \sin x}{8 \cos x} + \frac{15}{8} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \quad \text{сред. ние}$$

числитель $\sin x + \cos x = 1$ приводит к инт. $\int \frac{dx}{\cos x}$ при $k = 5, 3, 1$.

$$196. \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) - \sin x \quad \text{заменить } \sin x \text{ на } 1 - \cos x$$

$$197. \frac{1}{3 \cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} - \frac{\cos x}{2 \sin^3 x} + \frac{5}{2} \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \text{Примен. 195}$$

$$198. -\frac{1}{2y^2} + 2 \log y - \frac{1}{2} y, \quad y = \operatorname{tg} x.$$

$$199. \operatorname{tg} x - \frac{3}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \cos x. \quad \text{Выразить } \sin^2 x \text{ через } \cos x.$$

$$200. \frac{\sin x}{2 \cos x} - \frac{5}{2} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + 2 \sin x + \frac{1}{2} \sin^3 x. \quad \text{Выразить } \sin^3 x \text{}$$

через $\cos x$.

$$201. \frac{1}{9} y^9 - \frac{2}{11} y^{11} - \frac{1}{13} y^{13}, \quad y = \sin x.$$

$$202. -\frac{1}{8} y - \frac{1}{10} y^{10}, \quad y = \cos x.$$

$$203. \frac{\cos^6 x}{12} \left(\sin^2 x - \frac{7}{10} \sin x - \frac{7}{16} \sin^2 x - \frac{7}{32} \sin x \right),$$

$$+ \frac{7}{512} \left(\frac{1}{3} \sin x \cos^4 x + \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x \right) \quad \text{по форм. приведенн.}$$

$$\text{или: } \frac{1}{1024} \left[\frac{\sin 12x}{24} - \frac{\sin 10x}{5} + \frac{\sin 8x}{8} - \sin 6x - \frac{17 \sin 4x}{8} - 2 \sin 2x + 7x \right]$$

(через кратные дуги).

$$204. -\frac{2}{1} y, \quad y = \operatorname{tg} x.$$

$$205. \frac{2}{3} y, \quad y = \cos x.$$

$$206. 3y^3, \quad y = \operatorname{tg} x.$$

207. $\frac{1}{2} \sqrt{\sin x \cos^3 x} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \log \frac{1 + \sqrt{2}y + y}{1 - \sqrt{2}y + y} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt{2}y}{1 - y}, y = \tan x.$
208. $\frac{4}{3} y^3, y = \tan x.$ 209. $\frac{-2}{\sqrt{y}} + \frac{2}{3} y^3, y = \tan x$
210. $\frac{1}{1} y^4 - \frac{1}{2} y - \lg \cos x, y = \tan x.$
211. $-\frac{1}{3} y^3 + y + x, y = \cot x.$
212. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{1 - \sqrt{2}y + y}{1 - \sqrt{2}y - y} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt{2}y}{1 - y}, y = \tan x.$
213. $\arctg y - \frac{\sqrt{3}}{4} \log \frac{y^2 + y\sqrt{3} + 1}{y - y\sqrt{3} + 1} - \frac{1}{2} \arctg \frac{y}{1 - y^2}, y = \sqrt{3} \tan x.$
214. $\frac{1}{\sqrt{10}} \arctg \left(\sqrt{\frac{2}{5}} y \right), y = \tan x.$
215. $\frac{\sin x \cos x}{24(3 - \sin^2 x)} + \frac{7}{4\sqrt{3}} \arctg \left(\frac{2 \tan x}{\sqrt{3}} \right), \tan x = y.$
216. $-\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x}, \cot x = y.$
217. $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} \log (2 \cos x - \sin x), y = \tan x$
218. $\frac{1}{1.5} \log \frac{y}{y - 2 - \sqrt{3}} - \frac{2 - \sqrt{3}}{1.5}, y = \tan^2 x.$
219. $\frac{-1}{6(1 - 3 \cos x)^2}, y = 1 - 3 \cos x.$
220. $\frac{\sin x}{2 \cos x} - x - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctg \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} \right)$ Интегр. по частям
221. $\frac{\cos x}{8(3 + \sin x)} - \frac{3}{8\sqrt{2}} \arctg \left(\frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} \right),$ Выделить дробь

тогда $\sin^2 x - \cos^2 x - 1$ и интегрировать $\int \frac{\cos x}{13 \sin^2 x} dx$ по частям.

$$222. \frac{-\cos x}{3(2+3\sin x)} - \frac{1}{9}x + \frac{2}{9\sqrt{5}} \log \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 - \sqrt{5}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 + \sqrt{5}}. \text{ Интегр.}$$

по частям.

$$223. \frac{1}{18}y + \frac{1}{27} \log(1-3y) + \frac{5}{27(1-3y)}, y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$224. \frac{\sin x - 1}{2(2+\cos x)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin x}{2+\cos x} - \frac{1}{313} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right).$$

Приводится к интегралам $\int \frac{dx}{(2+\cos x)^l}$ ($l=3, 2$) и $\int \frac{\sin x dx}{(2+\cos x)^4}$.

$$225. \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} 2x \right) \text{ Подста-}$$

новка $y = \operatorname{tg} x$ или $x = \sin 2x$.

$$226. \frac{1}{6} \log \frac{1+\sin 2x}{2-\sin 2x} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3}}, \operatorname{tg} x = y.$$

$$227. 2 \log(y-1) - \log(y^2+y-2), y = \operatorname{tg} x.$$

$$228. \frac{1}{2\sqrt{10}} \log \frac{3y+1-\sqrt{10}}{3y-1-\sqrt{10}}, y = \cos x.$$

$$229. \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{1+y+\sqrt{2}}{1+y-\sqrt{2}}, y = \sin x.$$

$$230. \frac{x}{10} - \frac{3}{10} \log(\sin x + 3 \cos x), y = \operatorname{tg} x.$$

$$231. \frac{1}{1-e^2} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 x}}, y = \sin x.$$

$$232. \frac{1}{2} \log \sin x - \frac{1}{6} \log \sin 3x, y = \sin x.$$

$$233. \frac{\sin x}{1+\cos 2x}, y = \sin x \quad 234. -\log(1-\operatorname{tg} x), \operatorname{tg} x = y.$$

$$235. x - \operatorname{tg} x + \log(1+\operatorname{tg} x), y = \operatorname{tg} x.$$

$$236. \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \log \cos 2x - \frac{1}{4} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \text{ Умножить чи-}$$

слитель и знаменатель на $\sin x \cos x$, выразить через триг. вели-
чины угла $2x$.

$$237. \log \frac{1 + \sin x \cos x}{\cos x} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad y = \operatorname{tg} x.$$

$$238. \frac{1}{2(k+1)(b-a)} y^{k+1} \text{ при } k > -1, \quad \frac{1}{2(b-a)} \log y \text{ при } k = -1, \\ y = a \cos^2 x + b \sin^2 x$$

$$239. \frac{1}{4} \log \operatorname{tg} 2x, \quad y = \operatorname{tg} 2x.$$

$$240. \frac{1}{4} \log \frac{1 + \sqrt{2} y}{1 - \sqrt{2} y} = \frac{1}{4} \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + y, \quad y = \cos x.$$

$$241. \frac{1}{8\sqrt{2}} \log \frac{1 + \sqrt{2} \sin 2x}{1 - \sqrt{2} \sin 2x} + \frac{1}{8} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right), \quad y = \operatorname{tg} x.$$

$$242. -\frac{1}{3} y + \frac{2}{3\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3}y + 1}{1 - 3y}, \quad y = \cot x.$$

$$243. -\frac{1}{3} y + \frac{2}{3\sqrt{3}} \log \frac{1 + \sqrt{3}y}{1 - 3y}, \quad y = \operatorname{tg} x.$$

$$244. \frac{1}{2} \log \cos x - \frac{1}{6} \log \cos 3x, \quad y = \cos x.$$

$$245. \frac{3}{4\sqrt{4}} \log \left(\sqrt{\sin 3x + y} \sqrt{\frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{4} - \log y.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{4}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \sin 3x} - y}{y\sqrt{3}}, \quad y = \sin x.$$

$$246. \frac{1}{\log 2} \cdot \log 2^x + 1, \quad y = 2^x + 1.$$

$$247. x - \log \sqrt{1 - e^{-x}} + e^{-x} + 1 = \frac{1}{2} e^{-x}, \quad y = e^{-x}.$$

$$248. e \sqrt{x} \left(\frac{2}{3} \log^3 x - \frac{8}{9} \log x + \frac{16}{27} \right), \quad y = \lg x \text{ или по частям.}$$

$$249. \log \left| \frac{x^2 \lg^2 x}{1 + \lg x} \right|, \quad y = \log x.$$

$$250. \frac{x \log x}{1 + x^2} = \log (x + \sqrt{1 + x^2}). \text{ По частям.}$$

$$251. - \frac{\log x}{1-x} - \log \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}. \text{ По частям.}$$

$$252. 2\sqrt{x-1} \log x + 2 - 4\sqrt{x-1} - 4 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}. \text{ По частям.}$$

$$253. \frac{\log(x-2)}{2(x-1)^2} - \frac{1}{18} \log \frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{18} \frac{x-2}{x+1}. \text{ По частям.}$$

$$254. R \log \frac{x-1}{x+1} - 1 - \frac{1}{1-x} \log \frac{R-1}{R+1}, \quad R = \sqrt{x^2 - 2x + 3}.$$

По частям.

$$255. - \frac{\log(x-1)}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \log \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x. \text{ По частям.}$$

$$256. x \log(x-1) - x - 1. \text{ По частям.}$$

$$257. \frac{1}{2} \log^2 y, \quad y = x + \sqrt{1+x^2}.$$

$$258. \frac{\log \frac{x-1}{x+1}}{x-1} - \frac{1}{1-x} \log \frac{1}{x-1} - R + 1 - x - 2x - 3.$$

По частям.

$$259. \left(y - \frac{1}{3}y^3\right) \log y - y - \frac{1}{9}y, \quad y = \operatorname{tg} x.$$

$$260. \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{32}\right) \operatorname{arcsin} x - \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{32}x\right). \text{ По частям.}$$

$$261. x y^3 - 6y - 1 - \sqrt{x^2 + y^2 - 6}, \quad y = \operatorname{arcsin} x \text{ (или по частям).}$$

$$262. \frac{\operatorname{arcsin} x}{1-x^2} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \text{ По частям.}$$

$$263. \frac{x \operatorname{arcsin} x}{1-x^2} - \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} x. \text{ По частям.}$$

$$264. \frac{x \operatorname{arcsin} x}{1-x^2} - \frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x}. \text{ По частям.}$$

$$265. \frac{\operatorname{arcsin} x}{1-x^2} - \frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x}. \text{ По частям.}$$

$$266. - \operatorname{arcsin} \sqrt{1-x^2} - x. \text{ По частям.}$$

267. $2\sqrt{1+x} \arcsin x + 4\sqrt{1-x}$. По частям.

268. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \arcsin x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^3$. По частям.

269. $(1+x) \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \arctg \sqrt{\frac{x}{1-x}}$. По частям

или подстан. $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$.

270. $\left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x-x^2}$. По частям или подстановкой $x = y^2$.

271. $(x+1) \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x}$. По частям или подстановкой $x = y^2$.

272. $\frac{1}{3}x^3 \arctg x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6} \log(1+x^2)$. По частям.

273. $-\frac{\arctg x}{1+x} + \frac{1}{2} \log(1+x) - \frac{1}{4} \log(1+x^2) + \frac{1}{2} \arctg x$. По частям.

274. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \arctg x - \log(x + \sqrt{1+x^2})$. По частям.

275. $-\arctg x \sqrt{1-x^2} - \arcsin x - \frac{1}{2} \arctg \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$. По частям.

276. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (x \arctg x - 1)$. По частям.

277. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} (x - \arctg x)$. По частям.

278. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arctg x - \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2} - \sqrt{1-x^2}}$. По частям.

279. $\frac{\arctg x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. По частям.

280. $x \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2}$. По частям или подстановкой

$$y = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$281. \quad \frac{x^2 + 1}{4(x^2 - 1)} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} x. \text{ По частям.}$$

$$282. \quad e^x, y = \cos^2 x.$$

$$283. \quad e^{1-x} (2x-1) \sqrt{x-4}, y = \sqrt{x-4}.$$

$$284. \quad e^{-x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right), y = \frac{1}{x}.$$

$$285. \quad \log(\log x - 1) \log x = y.$$

$$286. \quad \frac{1}{x \lg x}, y = x \log x.$$

$$287. \quad \cot x, (\log \operatorname{tg} x - 1). \text{ По частям}$$

$$288. \quad \sin x, \log \operatorname{tg} x = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \text{ По частям.}$$

$$289. \quad \frac{\log \sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \log \operatorname{tg} x. \text{ По частям.}$$

$$290. \quad \operatorname{tg} x \cdot (\lg \cos x - 1) = x. \text{ По частям.}$$

$$291. \quad \log \sin x \cdot \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x \right) = \frac{2}{3} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg} x \text{ По частям.}$$

$$292. \quad -\frac{2e^{-x}}{\sqrt{x}}. \text{ Интеграл } \int \frac{e^{-x} dx}{x \sqrt{x}} \text{ брать по частям.}$$

$$293. \quad x \cot x. \text{ Интеграл } \int \frac{-x dx}{\sin x} \text{ берется по частям.}$$

$$294. \quad \frac{e^x}{\sin^2 x}, \int \frac{e^x \cos x}{\sin^4 x} dx \text{ берется по частям.}$$

$$295. \quad \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^3} \right). \text{ Начиная с } \int \frac{dx}{x^3},$$

брать по частям

$$296. \quad \frac{x}{2x-1} = e. \text{ Подстановка } 2x-1=y \text{ и далее, как в 295.}$$

$$297. \quad \frac{x}{\log x}. \text{ Подстановка } y = \lg x \text{ и интегр. по частям.}$$

$$298. \quad \frac{\log x - 1}{\log x \cdot x}. \text{ Подстановка } y = \lg x - 1 \text{ и интегр. по частям}$$

$$299. \quad \frac{2}{1 + \log x}. \text{ Подстановка } \lg x = y \text{ и далее, как 295}$$

$$300. \quad -\cos x + e^{-x} \sin x. \text{ Брать по частям } \int e^{-x} \sin x dx \text{ и } \int e^{-x} \cos x dx.$$

$$301. \quad -\frac{2 \cos x}{\sqrt{\sin x}}. \text{ Брать } \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\sin x}} = \int \sqrt{\sin x} dx \text{ по частям.}$$

302. $\int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} dx$ Брать $\int \frac{1}{\sin x} dx$ по частям
303. $\int \frac{e^x}{x} dx$ Брать $\int \frac{1}{x} dx$ по частям.
304. $\frac{\sin x}{x}$. Брать $\int \frac{-\sin x}{x^2} dx$ по частям
305. $2 \log x \cdot (1 - \sqrt{1-x^2}) - 2 \sqrt{1-x^2} - 1 \log (1 - \sqrt{1-x^2})$
По частям.
306. $\log x \cdot (1 - \sqrt{1-x^2}) - \sqrt{1-x^2} - \log (1 - \sqrt{1-x^2})$
По частям.
307. $2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right)$, $y = \operatorname{th} \frac{x}{2}$
308. $\frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh} x} = \frac{1}{2} \log \operatorname{th} \frac{x}{2}$, $y = \operatorname{th} \frac{x}{2}$
309. $\operatorname{th} x = \frac{2}{3} \operatorname{th}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{th}^5 x$, $y = \operatorname{th} x$.
310. $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{th} x \right)$, $y = \operatorname{th} x$.
311. $\frac{1}{13} (2 \operatorname{ch} 2x \cos 3x - 3 \operatorname{sh} 2x \sin 3x)$. По формуле с неопределенными коэффициентами.
312. $(0,2 \sin x - 0,12 \cos x) \operatorname{sh} 2x + (0,1 x \cos x - 0,16 \sin x) \operatorname{ch} 2x$
Как 311.
313. $\operatorname{sl} x = \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{27} \right) \frac{2}{9} \operatorname{sch} x$. По частям
314. $\frac{1}{2} (x^2 - 1) \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} x$ По частям.
315. $\left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} \right) \operatorname{arctg} x = \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2}$ По частям
316. $\log \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{th} x = x$. По частям.
317. $\operatorname{ch} x \log \operatorname{th} x = \log \operatorname{th} \frac{x}{2}$ По частям
318. $\frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch} x} = \frac{2}{1-3} \log \frac{1-3-\operatorname{th} \frac{x}{2}}{1-3+\operatorname{th} \frac{x}{2}}$ По частям

$$319. \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

$$320. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| + C$$

$$321. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| + C$$

$$322. \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| + C$$

$$323. \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| + C$$

$$324. \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| + C$$

$$325. \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| + C$$

$$326. \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| + C$$

$$327. \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| + C$$

$$328. \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| + C$$

$$329. \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| + C$$

$$330. \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| + C$$

ОТДЕЛ III.

Геометрические приложения дифференциального исчисления.

1—22. При решении задач n^o 1—22 следует иметь в виду формулы:

$$S_t = -y \cot \alpha, \quad S_n = y \operatorname{tg} \alpha, \quad T = \left| \frac{y}{\sin \alpha} \right|, \quad N = \left| \frac{y}{\cos \alpha} \right|, \quad X_t = \frac{x \sin \alpha - y \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$Y_t = \frac{x \sin \alpha - y \cos \alpha}{\cos \alpha}, \quad L_t = \frac{x \sin \alpha - y \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad P_t = x \sin \alpha - y \cos \alpha,$$

$$X_n = \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad Y_n = \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\sin \alpha}, \quad L_n = \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha},$$

$P_n = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, где α угол касательной с осью абсцисс ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$). Легко доказать, что во всех этих задачах $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$,

откуда получается $\alpha = t$; вводя в предыдущие выражения вместо α букву t , без труда проверяем все результаты.

23—30. В задачах 23—30 следует найти выражение $\operatorname{tg} \alpha = y'$ в виде функции от x, y , внести его в формулы.

$S_n = y y'$, $X_t = x \frac{y}{y'}$, $Y_t = y - x y'$ и проч., после чего требуемые результаты приводятся к простым тождествам.

31—37. В задачах 31—37 следует принять во внимание формулы:

$$S_t = r \operatorname{tg} \mu, \quad S_n = r \cot \mu, \quad T = \left| \frac{r}{\cos \mu} \right|, \quad N = \left| \frac{r}{\sin \mu} \right|, \quad P_t = r \sin \mu, \quad P_n = r \cos \mu,$$

где μ угол между радиусом-вектором и касательной ($\operatorname{tg} \mu = \frac{r d\theta}{dr}$).

Легко доказать, что во всех этих задачах $\frac{r d\theta}{dr} = \operatorname{tg} \alpha$, откуда следует $\mu = \alpha$; вводя $\mu = \alpha$ в предыдущие формулы, без труда получим требуемые соотношения.

38—40. В этих задачах нужно определить угол μ через θ ($\operatorname{tg} \mu = \frac{r d\theta}{dr}$), после чего требуемые зависимости превращаются в простые тождества.

41—43. В этих задачах нужно показать, что $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$, откуда следует, что $t = \alpha$ (углу касательной с осью x), и потому $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\cos t} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt}$; задача приводится к установлению тождества: $\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} f(y)$.

44—45. Задача приводится к установлению тождества: $ds = d\left(\frac{y^2}{T}\right)$, $ds = d\left(\frac{1}{\sqrt{a}} y^{\frac{1}{2}}\right)$.

46—48. Нужно доказать, что $\operatorname{tg} \mu = \frac{r \frac{d\theta}{dr}}{dr} = \operatorname{tg} u$, откуда следует $\mu = u$ и $ds = N d\theta = \frac{1}{\cos \mu} dr = \frac{1}{\cos u} dr$. Задача приводится к установлению тождества $\frac{1}{\cos u} \frac{dr}{du} = \frac{d}{du} f(r, u)$, где $f(r, u) = N$ или S или P .

49 Нужно доказать, что $\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{r}{\cos \mu} \right)$.

50—62. В этих задачах нужно составить для обоих уравнений каждой системы значения производных y , свободные от параметров a и b , и доказать, что $y_1 \cdot y_1' + 1 = 0$ (условие ортогональности).

63—64. Здесь нужно составить для каждой из 2 кривых значения угла μ в виде функции от θ и доказать, что разность их $\mu_2 - \mu_1$ равна $\frac{\pi}{2}$ или ω .

65—68. Координаты параллельных кривых определяются формулами $x_2 = x - k \sin \alpha$, $y_2 = y + k \cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$.

$$65. \quad x_2 = \frac{1}{2} p \cot^2 \alpha - k \sin \alpha, \quad y_2 = p \cot \alpha + k \cos \alpha.$$

$$66. \quad x_2 = -a \cos^3 t - k \sin t, \quad y_2 = a \sin^3 t + k \cos t.$$

$$67. \quad x_2 = a(t - \sin t) - k \cos \frac{t}{2}, \quad y_2 = a(1 - \cos t) + k \sin \frac{t}{2}.$$

$$68. \quad x_2 = a \cosh^3 \frac{1}{2} \theta - k \cosh \frac{1}{2} \theta, \quad y_2 = a \sinh^3 \frac{1}{2} \theta + k \sinh \frac{1}{2} \theta.$$

69 75. Уравнение полярны относительно точки (x_0, y_0) получается исключением букв x, y из системы

$$Y - y_0 = y(X - x_0), Y - y_0 = -\frac{1}{y}(X - x_0).$$

$$69. 2X(X' - Y^2) - Y^2 = 0. \quad 70. X = 0$$

$$71. (X^2 + Y^2)^2 = 4a^2 XY.$$

$$72. (X^2 + Y^2)^\lambda = (aX)^{\lambda_1 \lambda} + (bY)^\lambda = \frac{n}{n-1}.$$

$$73. 27(X^2 - Y^2)^2 - 4a^2 X = 0 \quad 74. (X^2 + Y^2)^2 - a^2 X^2 Y^2$$

$$75. r = a\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

76 84. Полярные координаты точек полярны будут $r = \rho \sin \varphi$, $\varphi = \varphi_0 + \psi = \frac{\pi}{2} \left(\text{tg } \varphi = \frac{y}{x} \right)$; исключение ψ из этих уравнений дает уравнение полярны.

$$76. \rho = a \cos \frac{\varphi}{2} \quad 77. \rho = a(1 - \cos \varphi)$$

$$78. \rho = \frac{a}{2} \left(\cos \varphi - 3 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \quad 79. \rho = a^2 \cos 2\varphi$$

$$80. \rho = \frac{a}{2 \cos \varphi} \quad 81. \rho^\lambda = a^\lambda \cos^\lambda \varphi, \lambda = \frac{k}{k-1}$$

$$82. \rho = \frac{a^2}{\sqrt{1-\theta^2}}, \varphi = \theta - \frac{\pi}{2} + \arctg \theta.$$

$$83. \rho = ae^{m \cos \varphi}, \varphi = \frac{1}{2m} \arccos \frac{1-m}{1+m} = a \arctg \theta$$

$$84. \rho = a \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$85-95. \text{ Из формулы } \text{tg } \alpha = \frac{dy}{dx} \text{ нужно определить угол } \alpha,$$

как функцию от t и затем вычислять R по формуле, $R = \frac{dx}{dt} \frac{d\alpha}{dt}$

$$85. h = at \quad 86. ka = \frac{a-1}{n-2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$87. 3a \sin t \cos t \quad 88. 15a \sin^2 t = 5(3a t^2)$$

$$89 \quad a \cos t = 4 \sqrt{2} a f$$

$$90 \quad 3a \sin t = 3 \sqrt{2} a f$$

$$91 \quad at^2 = 1 + \frac{x^2 - y^2}{4a^2}$$

$$92. \quad \frac{ea}{\cos^2 t} = 3a \sqrt{\frac{y}{2a}}$$

$$93. \quad 2ae^{-t} = \sqrt{2(x^2 + y^2)}.$$

$$94. \quad 4a(1+t^2) = 4a\left(\frac{y}{a}\right)^2 \quad 4N \quad N \text{ — длина нормали}$$

$$95. \quad \frac{ak}{\cos^{k+1} t} = k \cdot N.$$

96 108. Доказать сперва, что $\frac{dy}{dx} = \tan t$, откуда следует $\alpha = t$; затем вычислить R по формулам

$$R = \frac{1}{\cos t} \frac{dx}{dt} \text{ или } R = \frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt} \text{ или } R = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

109 118. Доказать, что $\frac{dy}{dx} = \tan t$, и следовательно $\alpha = t$, выразить через t радиус кривизны R $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\cos t} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt}$ и длину дуги

$$s = \int_0^s \frac{ds}{dt} dt = \int_0^s R dt, \text{ после чего требуемый результат получится к простому тождеству.}$$

119 129. Доказать сперва, что $\tan \alpha = \frac{1}{dr} \frac{dr}{du} = \tan u$, откуда следует $\alpha = u$; затем составить выражения.

$$\frac{dx}{du} = \frac{dr}{du} + 1, \quad \frac{ds}{du} = N \frac{dr}{du} = \frac{r}{\sin u} \frac{dr}{du} = \frac{1}{\cos u} \frac{dr}{du},$$

и тогда получится выражение R :

$$R = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{\frac{dr}{du}}{\left(1 + \frac{dr}{du}\right) \cos u} \cdot \frac{\frac{dr}{du}}{\sin u} \cdot \frac{1}{1 + \frac{dr}{du}} \text{ которое можно предста-}$$

вить в виде:

$$R = \frac{1}{\frac{dr}{du}} \cdot \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\tan u} = \frac{1}{r} \frac{dr}{du}.$$

Пользуясь одним из приведенных выражений R , а также формулами, данными в рещ. 31—37, легко проверяем все требуемые соотношения.

130—132. Определить угол μ ($\operatorname{tg} \mu = \frac{r d\theta}{dr}$) через θ , найти затем $\alpha = \mu + \theta$ и вычислить $R = \frac{ds}{d\alpha}$, при чем $N = \frac{ds}{d\theta}$.

133—149. Выразить угол α ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$) через t , составить $\frac{d\alpha}{dt}$ и вычислять координаты точек эволюты по формулам

$$x_c = x - \frac{dy}{dt} : \frac{d\alpha}{dt}, \quad y_c = y + \frac{dx}{dt} : \frac{d\alpha}{dt}$$

В ответах значки c при x и y опущены.

$$133. \left(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{9}\right)^3 = \frac{4}{9} a^2 \left[\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + y^2\right], \quad \alpha = \frac{3}{2} t.$$

$$134. (x^2 + y^2 - a^2)^4 = \frac{27}{4} a^4 x^2, \quad \alpha = 2t.$$

$$135. (x+y)^{2/3} + (x-y)^{2/3} = 2a^{2/3}, \quad \alpha = t.$$

$$136. 27py^3 = 8(x-p)^3, \quad \alpha = t.$$

$$137. x^3 + y^3 = a^3, \quad \alpha = t.$$

$$138. x = ae^{-t}(\cos t - \sin t), \quad y = ae^{-t}(-\sin t - \cos t), \quad \alpha = t.$$

$$139. x = 2a(t \cos t - \sin t), \quad y = 2a(t \sin t + \cos t), \quad \alpha = t.$$

$$140. x = 3a \left[\log \operatorname{tg} \left(\frac{r}{1} + \frac{t}{2} \right) - \frac{\sin t (1 + \sin^2 t)}{\cos^2 t} \right], \quad y = \frac{3a}{\cos^2 t}, \quad \alpha = t$$

$$141. x = -4at^3 \left(t^2 - \frac{5}{3} \right), \quad y = 5a(1 + t^2)^2, \quad \alpha = \operatorname{arctg} t.$$

$$142. x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad \alpha = \pi - \frac{1}{2}t.$$

$$143. y^2 = 2px, \quad \alpha = t.$$

$$144. x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - t.$$

$$145. x = t - \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2t}{a}, \quad y = 2a \operatorname{ch} \frac{t}{a}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \frac{t}{a}$$

$$146. x = \frac{a^2 - 3t^2}{2t}, \quad y = -\frac{3a^2 - t^4}{2a-t}, \quad \tan \alpha = -\frac{a}{t}.$$

$$147. x = \frac{t(a^4 - t^4)}{2a^4}, y = \frac{5t^4 + 3a^4}{6a^2t}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{t^2}{a^2}.$$

$$148. (ax)' + (by)'' = (a^2 - b^2)'', \operatorname{tg} \alpha = -\frac{b \cos t}{a \sin t}.$$

$$149. (ax)' - (by)'' = (a^2 + b^2)'', \operatorname{tg} \alpha = \frac{b \operatorname{ch} t}{a \operatorname{sh} t}.$$

150–153. Выразить угол μ ($\operatorname{tg} \mu = \frac{r d\theta}{d\psi}$) через θ и отсюда найти

$\alpha = \mu + \theta$, $\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{d\mu}{d\theta} + 1$. Затем координаты точек эволюты найдутся по формулам:

$x_1 = x - \frac{dy}{d\theta} \frac{d\alpha}{d\theta}$, $y_1 = y + \frac{dx}{d\theta} \frac{d\alpha}{d\theta}$, при чем $x = f(\theta) \cos \theta$, $y = f(\theta) \sin \theta$, если $r = f(\theta)$ есть уравнение данной кривой.

$$150. x = -a \sin \theta + \frac{a(\sin \theta + \theta \cos \theta)}{2 + \theta^2}, y = a \cos \theta - \frac{a(\cos \theta - \theta \sin \theta)}{2 + \theta^2};$$

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{2 + \theta^2}{1 + \theta^2}$$

$$151. (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} a \left(\text{получается исключением } \theta \right)$$

$$\text{из системы } \begin{cases} x = \frac{2a \cos^3 \theta}{3(1 + \cos 2\theta)}, \\ y = \frac{2a \sin^3 \theta}{3(1 + \cos 2\theta)}, \end{cases} \frac{dx}{d\theta} = 3.$$

$$152. x = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} (2 \cos \theta - \cos 2\theta), y = \frac{a}{6} (2 \sin \theta + \sin 2\theta), \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{3}{2}.$$

$$153. x = \frac{a}{2(n+1)(\cos \theta)^n} \left[(n-1) \cos(n-1)\theta + (n+1) \cos(n+1)\theta \right]$$

$$y = \frac{a}{2(n+1)(\cos \theta)^n} \left[(n-1) \sin(n-1)\theta - (n+1) \sin(n+1)\theta \right],$$

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = n+1.$$

$$154. y = 2\rho^2 - \rho^2.$$

$$155. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$156. \frac{1}{2} \rho^2 - \rho^2 = a.$$

$$157. x = \eta^2 - R, y = \eta^2.$$

$$158. x^2 - y^2 - 2ax - 2by = 4h(x^2 + y^2), \quad 159. y^2 = \frac{2p}{q}x.$$

$$160. \frac{a^4}{b^4} \quad 161. \frac{h^2 x^2}{a^4} + \frac{k^2 y^2}{b^4} = 1.$$

$$162. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}. \quad 163. \frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1.$$

$$164. x = \frac{v}{2\omega}(a \sin u), y = \frac{v}{2\omega}(1 - \cos u), u = 2\omega t; \quad t \text{ — время,}$$

протекшее от того момента, когда подвижная прямая совпала с осью x и движущаяся точка совпала с началом координат.

$$165. \downarrow v_2 x - \downarrow v_1 y = \downarrow a_1 v_2 - a_2 v_1 \text{ (переменная прямая)}$$

$$\frac{x}{a + v_1 t} + \frac{y}{a + v_2 t} = 1),$$

$$166. (x+y)^2 + (x-y)^2 = (a\sqrt{2})^2 \text{ (переменная прямая)}$$

$$ax - by = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) \text{ при } \alpha^2 + \beta^2 = a^2.$$

$$167. x' - y' = (2a)^2 \text{ (переменная прямая } xsint + ycost = asin2t).$$

$$168. \text{Огибающая общая: } x = Rcost - \frac{p}{2}tg^2 t, y = R\text{ sint} - ptgt$$

$$\text{траектории } (y - R\text{ sint})^2 = 2p^2 t^2 - Rcost).$$

$$169. \text{Огибающая общая: } x = Rcost - \frac{a^2 \cos t}{\downarrow a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t},$$

$$y = R\text{ sint} - \frac{b^2 \sin t}{\downarrow a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \left(\text{траектории: } \frac{(x - Rcost)^2}{a^2} + \right.$$

$$\left. \frac{(y - R\text{ sint})^2}{b^2} = 1 \right).$$

$$170. \text{Огибающая общая: } x = Rcost + a \downarrow tg^2 t, y = R\text{ sint} + a \downarrow cost$$

$$\text{траектории } (x - Rcost, (y - R\text{ sint}) = a).$$

$$171. \frac{x}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1 \text{ и точка } (0, 0).$$

$$172. x - y' = c'. \quad 173. 4x^2 y^2 = c^4$$

$$174. x - y = c \text{ (квадрат).} \quad 175. \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{c} \text{ (четыре гиперболы).}$$

$$176. \downarrow c + \downarrow y - \downarrow c. \quad 177. x y^2 = c - (x^2 + y^2)$$

178. $y^2 = 2ax$

179. $4y = 27ax$

180. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

181. $x + y^2 = 2ax$

182. $4xy = a^4$

183. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$

184. $x + y^4 = a^4, \lambda = \frac{1}{k+1}$

185. $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1$

186. $(x - x_0)^2 + y^2 = a^2$ (получим начало в точку x_0 , $y = 0$, получаем в новой системе уравнение касательной $\alpha x + \beta y = 1$ при $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{a^2}$)

187. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Касательные $\alpha x + \beta y = 1$ при условии $a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 = 1$, где $a^2 = c^2 + b^2$.

189. Перетяжка: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e}\right)$ Асимптоты: $x = 0$ и $y = 1$. Начало — точка преобразования.

190. Асимптоты: $x = 0$ и $y = 1$.

191. Вершина (гипербола): $(0, 1)$. Перетяжка: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e}\right)$. Асимптота: $y = 0$.

192. Вершина (гипербола): $\left(1, \frac{1}{e}\right)$. Перетяжка: $\left(2, \frac{2}{e}\right)$. Асимптота: $y = 0$.

193. Вершины min: $(0, 0)$, max: $\left(2, \frac{1}{e}\right)$. Перетяжка при $x = 2 + \sqrt{2}$. Асимптота: $y = 0$.

194. Вершины: min: $\left(-2, -\frac{8}{e}\right)$, max: $\left(2, \frac{8}{e}\right)$. Перетяжка при $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 0$, $x = 2 - \sqrt{2}$. Асимптота: $y = 0$.

195. Вершина: min: $(0, 2)$. Две бесконечные ветви, левая с асимптотой: $y + x = 1$.

196. Асимптота: $2x - 4y = 1$. В начале угловая точка с касательными $y = 0$, $y = x$.

197. При $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ — пересечения кривой с осью x ,

$$\text{при } x = \frac{8k+1}{4}\pi \quad \text{максима } y = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{8k+1}{4}\pi}$$

$$\text{при } x = \frac{8k+3}{4}\pi \quad \text{минима } y = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{8k+3}{4}\pi}$$

при $x = k\pi$ — точки перегиба.

198. Вершина: $\min \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{2e} \right)$. Перегиб $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{3}{2e} \right)$

Начало — точка прекращения.

199. Вершина: $\min \left(\frac{1}{e}, \left(\frac{1}{e} \right)' \right)$ В 0,1 — точка прекращения.

200. При $\frac{m}{n} < 0$ — асимптоты $x = 0$, $y = 0$; при $0 < \frac{m}{n} < 1$ —

в начале (при касательной $x = 0$) — вершина, если n четн., m нечетн.; возврат, если n нечетн., m четное; перегиб, если n и m нечетные; при $\frac{m}{n} > 1$ в начале (при касательной $y = 0$): возврат, если n четное, m нечетное; вершина, если n нечетн., m четное; перегиб, если n и m нечетные.

201. Вершины: $\max (2, 2.1)$, $\min (1, 0.6)$. Перегиб $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right)$

202. Вершины: $\min (0, 0.5)$, $\max (1, 0.6)$, $\min (2, 0.5)$. Перегибы при $x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

203. Вершины: $\max (2, 0.6)$, $\min (1, -2.8)$, $\max (1, 1.8)$, $\min (2, 2.6)$. Перегибы: $(0, 1)$, $\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}, 1 + \frac{13}{16}\sqrt{10} \right)$.

204. 4 асимптоты: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0.2$ — точки перегиба.

205. Вершины: $\max \left(-1, \frac{5}{2} \right)$, $\min \left(-1, \frac{1}{2} \right)$. Перегибы: $(0, 1)$, $\left(+\sqrt{3}, 1 + \frac{1}{4}\sqrt{3} \right)$. Асимптота: $y = 1$.

206. Вершина : $\max \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right)$ Асимптоты : $x = 1, x = 2, y = 1$.

207. Вершины : $\max (-1, 2), \min (1, 0)$ Перегибы : $(0, 1), \left(\mp 1, 3, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \right)$. Асимптота : $y = 1$

208. Вершины : $\max (2k\pi, 1), \min \left[\left(2k + \frac{1}{4} \right) \pi, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$.

$\max \left[\left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi, 1 \right], \min \left(2' + 1, \pi, -1 \right), \max \left[\left(2' + \frac{5}{4} \right) \pi, -\frac{1}{2} \right], \min \left[\left(2k + \frac{3}{2} \right) \pi, -1 \right]$ Перегибы : при $x = \left(k + \frac{3}{4} \right) \pi, \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} + k\pi, \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi, \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3}$.

209. Вершины : $\max \left(k \frac{\pi}{2}, 1 \right), \min \left((2k + 1) \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2} \right)$

Перегибы $\left((4k + 1) \frac{\pi}{8}, \frac{3}{4} \right)$

210. Перегиб : $\left(\frac{1}{2}, 0 \right)$. Асимптоты : $x = -1, x = 2$

211. Асимптоты : $x = -1, x = 2, y = 0$

212. Вершина : \max при $x = -\frac{1}{2}$. Перегибы : при $x = 0$.

$\frac{5 + \sqrt{45}}{10}$ Асимптоты : $x = 1, y = 0$

213. Вершины : \min при $x = -2$, \max при $x = 0$ (возврат).

Перегибы : при $x = -\frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$ Асимптоты : $x = 1, y = 0$.

214. В точке $(1, 0)$ касат. параллельна оси y . При $x = -3 + \frac{1}{4}$ перегибы. В начале возврат 1-го рода.

215. Вершина : $\min \left(\frac{3}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{16} \right)$, перегибы при $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$. Начало возврат 1-го рода. В точке $(1, 0)$ — касат. параллельна оси y .

216 232 Корни уравнения $\frac{dr}{dt} = 0$ (нечетной кратности) определяют точки кривой с касательными параллельными оси y ; корни уравнения $\frac{dy}{dt} = 0$ (нечетной кратности) определяют точки, где касательные параллельны оси x . Корни уравнения $\left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \right) : \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 = 0$ (нечетной кратности) определяют точки перегиба.

Если при $t = t_0$ оказывается $x = \infty, y = \infty$, причем пред. $\frac{y}{x} = a$ (при $t = t_0$), то существует асимптот. направление с угловым коэффициентом a ; если притом пред. $(y - ax = b$ при $t = t_0$, то прямая $y = ax + b$ будет асимптотой.

216. $t = 0$ дает $x \text{ minimum} = 0$, $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ дает точки перегиба $\left(\frac{1}{3}a, + \frac{4a\sqrt{3}}{9} \right)$, $t = +\infty$ определяет 2 бесконечные ветви (параболические).

217. $t = \frac{1}{2}$ дает $x \text{ max} = \frac{a}{4}$, $t = \frac{2}{3}$ дает $y \text{ max} = \frac{4}{27}a$, $t = 0$ дает $y \text{ min} = 0$; $t = +\infty$ определяет 2 бескон. параболические ветви. В начале узел с касат. $y = 0$ ($t = 0$) и $y = x$ ($t = 1$)

218. $t = 0$ дает $x \text{ min} = 0$; $t = \frac{2}{3}$ дает $x \text{ max} = \frac{4a}{27}$, $t = -\frac{1}{4}$ дает $y \text{ min} = -\frac{27a}{256}$; $t = \pm \infty$ определяет 2 параболические ветви.

219. $t = 0$ дает $x \text{ max} = a$; $t = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ дает крайние значения $y = +\frac{2a\sqrt{3}}{9}$; $t = +\infty$ определяет 2 параболические ветви. В начале узел с касательными: $y = x$ ($t = 1$), $y = -x$ ($t = -1$).

220. $t = 0$ дает точку пересечения с осью x ($a, 0$); $t = \frac{1}{\sqrt{4}}$ дает $y \text{ max} = \frac{a}{8} \sqrt{\frac{3}{2}}$, $t = 1$ дает точку соприкосновения с касательной $y = x$, $t = +\infty$ дает 2 параболические ветви.

221. $t = 1$ дает $x \min = 0$, $y \min = 0$; $t = \frac{1}{3}$ дает $y \max = \frac{4}{27} a$;

$t = 0$ дает пересечение с осью x $(a, 0)$; $t = +\infty$ определяет 2 параболоческие ветви. В начале $t = 1$ возврат 1 рода с касат. $y = x$.

222. $t = 0$ дает $x \min = 0$; $t = -2$ дает $x \max = -4a$; $t = -\frac{3}{2}$ дает $y \min = \frac{27}{4} a$; $t = -3$ дает перегиб $(-\frac{9}{2}a, \frac{27}{2}a)$; $t = -1$ дает бескон. ветви с асимптотой $x + y - a = 0$. В начале $t = 0$ возврат 1-го рода; $t = +\infty$ дает 2 параболоч. ветви.

223. При $t = -\frac{3}{2}$ $x \min = \frac{27}{4} a$, при $t = 0$ $y \min = 0$, при $t = -\frac{4}{3}$ $y \max = \frac{256}{27} a$; при $t = -2$ перегиб $(8a, -16a)$; при $t = -1$ — две бесконечные ветви с асимптотой $x + y - a = 0$; при $t = +\infty$ две бескон. параболоческие ветви.

224. При $t = -1$ $x \min = \frac{31}{2} a$, при $t = -1\sqrt{3}$ $x \max = \frac{11\sqrt{3}}{2} a$; при $t = +1\sqrt{2}$ $y \max = -4a$, при $t = 0$ $y \min = 0$; при $t = -1$ — два перегиба $(+1, 21\sqrt{6}a, -7, 2a)$, при $t = +1$ бескон. ветви с асимптотой $y - x + \frac{1}{2}a = 0$; при $t = -1$ бескон. ветви с асимптотой $y + x + \frac{1}{2}a = 0$; при $t = +\infty$ — параболоч. ветви.

225. При $t = 0$ $y \min = 0$, при $t = +\infty$ — две параболоч. ветви.

226. При $t = 0$ $x \min = 0$, при $t = -1\sqrt{3}$ $y \min = -\frac{3\sqrt{3}}{2} a$, при $t = -1\sqrt{3}$ $y \max = \frac{3\sqrt{3}}{2} a$, при $t = +\infty$ — две бескон. ветви с асимптотой $x = a$, при $t = -1$ — ветви с асимптотой $x + y - \frac{a}{2} = 0$; при $t = +1$ — ветви с асимптотой $x - y - \frac{a}{2} = 0$. В начале $t = 0$ возврат 1-го рода с касательной $y = 0$.

227. При $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $y \min = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{4}$; при $t = 0$ перегиб $(a, 0)$; при $t = \pm \infty$ точка возврата $(0, 0)$ с касательной $x = 0$; при $t = 1$ бескон. ветви с асимптотой $y = x + \frac{a}{3} = 0$.

228. При $t = 0$ $x \min = 0$; при $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x \max = \frac{a}{3} \sqrt[3]{4}$; при $t = +\infty$ перегиб $(0, a)$; при $t = -1$ бескон. ветви с асимптотой $x = y - \frac{a}{3} = 0$. В начале $(t = 0)$ возврат 1-го рода с касат. $y = 0$.

229. При $t = 0$ $y \min = 0$; при $t = -\frac{1}{\sqrt{4}}$ $y \max = \frac{4}{3} \sqrt[3]{4} a$; при $t = -1$ две ветви с асимптотой $x = y + \frac{a}{3} = 0$, при $t = +\infty$ две ветви с асимптотой $x = a$.

230. При $t = 0$ $y \min = 0$; при $t = 1$ две ветви с асимптотой $y = x + a = 0$; при $t = -1$ две ветви с асимптотой $y + x + a = 0$; при $t = -1 + \sqrt{2}$ точки пересечения кривой с первой асимптотой и при $t = 1 + \sqrt{2}$ точки пересечения со второй асимптотой; при $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ перегибы $(\pm 2a \sqrt[4]{27}, 2a \sqrt{3})$; $t = \pm \infty$ дает точку возврата $(0, 0)$ с касательной $x = 0$.

231. При $t = 0$, $x \min = 0$, при $t = \frac{\pi}{2}$ $x \max = 2a$, $y = \infty$, т. е. существуют 2 бесконечные ветви с асимптотой $x = 2a$; в начале возврат 1-го рода с касательной $y = 0$.

232. При $t = +\pi$ $x \min = -a$; при $t = +\frac{\pi}{2}$ узел с касательными $y = \pm x$, при $t = +\arccos \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — крайние значения $y = \pm \frac{a}{2} \sqrt{5}$; 1) $\sqrt{V^5 - 2}$; $t = 0$ дает $x \max = a$ и определяет две бесконечные ветви с асимптотой $x = a$.

233 241. Точки перегиба определяются при совместном решении уравнения кривой и уравнения ее Гессовы.

233. $(0, -a)$. 234. $9a, -27a$. 235. $\left(+\sqrt[4]{3}a, 4a\right)$
 236. $(\pm 6\sqrt{6}a, 36a)$. 237. $(-2a, a)$. 238. $(a\sqrt{3}, +a)^{1/27}$.
 239. $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}a\right)$. 240. $\left(\frac{1}{3}a, 36a\right)$. 241. $(9a, -3a)$.

242 247. Точки перегиба определяются корнями пятой кратности уравнения $\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)'' = 0$ или уравнения $r - 2r' - r'' = 0$ (производные взяты по θ).

242 2 точки перегиба $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$.

243. 4 перегиба при $\operatorname{tg} \theta = \pm 2$.

244. 4 перегиба при $\operatorname{tg} \theta = +\sqrt{15}$.

245. 2 перегиба при $\cos \theta = \frac{17}{18}$.

246 1 перегиба: при $\cos \theta = \frac{4}{5}$, $\cos \theta = -2(5 - \sqrt{21})$.

247. 1 перегиб: при $\operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{3}$.

248. 2 перегиба: под касательной $y = 2x$ — нисходящий и над касательной $y = 3x$ — восходящий.

249 Завиток между касательными $y = x$, $y = 3x$, расположенный внутри угла иложит. координат.

250 Два перегиба при общей касательной $x + 2y = 0$.

251 Точка возврата 1-го рода с касательной $x = 3y$ при $x = 0$.

252. 2 ветви: $y = (2 + \varepsilon)x^2$, $y = (2 - \varepsilon)x^2$ касаются оси x .

253 2 ветви: $y = (-1 + \varepsilon)x^2$, $y = (-1 - \varepsilon)x^2$ касаются оси x .

254. Возврат 2-го рода с касательной $y = 0$ при $x = 0$.
 $y > 0$: $y = x^2(1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon})$ ($1 + \varepsilon$).

255. Возврат 2-го рода с касательной $y = 0$ при $x = 0$.
 $y < 0$: $y = \frac{1}{2}x^2(1 + \sqrt{1 - \varepsilon})$ ($1 - \varepsilon$).

256 Нисходящий перегиб с касательной $x = 0$.

257. Точка сепарационности при $x = 0$

258. Восходящий пересиб с касательною $y = 0$

259. Нисходящий пересиб с касательною $y = 0$.

260. 4 ветви: $y = \pm 2\sqrt{x(1+\varepsilon)}$, $y = x^2(1+\varepsilon)$,

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{33}{64}x^2, \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{31}{64}x^2.$$

261. 3 ветви: $y = \pm x(1+\varepsilon)$, $y = -2x^2(1+\varepsilon)$, $y = x + 2x^2$

262. 4 ветви: $y = \pm \sqrt{2}x(1+\varepsilon)$, $y = x^2(1+\varepsilon)$,

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2$$

263. 5 ветвей: $y = \pm \sqrt{x}(1+\varepsilon)$, $y = x(1+\varepsilon)$,

$$y = x + \frac{1}{2}x^2 \dots, y = -x - \frac{1}{2}x^2 \dots$$

264. 5 ветвей: $y = x(1+\varepsilon)$, $y = x^2(1+\varepsilon)$, $y = x + \frac{1}{2}x^2$,

$$y = -x + \frac{1}{2}x^2$$

265. 3 ветви: $y = x(1+\varepsilon)$, $y = x^2(1+\varepsilon)$.

266. 3 ветви: $y = \sqrt{x}(1+\varepsilon)$, $y = x(1+\varepsilon)$

267. 2 ветви: $y = \pm \sqrt{2}x(1+\varepsilon)$, $y = \frac{1}{2}x^2(1+\varepsilon)$

268. $x = 1 = 0$, $x = y = 1 = 0$, $x = y + 1 = 0$

269. $y = 1 = 0$, $x = 2y = 0$, $x + y + 1 = 0$

270. $x = 0$, $2x - y = 0$, $x - y + 1 = 0$.

271. $y = 0$, $x + y = 0$, $2x - y + 1 = 0$.

272. $x = 2 = 0$, $x = 2y = 0$, $2x - y = 0$.

273. $y = 2 = 0$, $3x - y = 0$, $x + y = 0$.

274. $y = 0$, $3x - y + 1 = 0$, $x - y = 0$.

275. $x = 0$, $x + 3y - 1 = 0$, $x + 2y = 0$.

276. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{32}$

277. $x = 0$, $x + y = \frac{1}{3} = 0$

278. 285. Если при $b = b_0$ оказывается $\lim_{x \rightarrow \infty} y = a$ и притом $b_0 < b_0$, а при $b = b_0$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} y = b_0$, то b_0 есть предельная асимптота.

$$278. r \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2a}{13}$$

$$279. r \cos \theta = a, \quad r \sin \theta = a$$

$$280. r \sin(\theta - \alpha) - a \sin \alpha = 0$$

$$281. r \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a}{2} = 0$$

$$282. r \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{a}{8}$$

$$283. r \sin \theta = 2a$$

$$284. r \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) = \frac{a}{8} \frac{a}{3}$$

$$285. r \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a}{4} \sqrt{2}$$

286 295 Так как общее уравнение линии 3-го порядка содержит 10 членов, то кривая 3-го порядка вполне определяется 9-ю условиями. Задание точки на кривой дает 1 условие; задание касательной (без точки касания) дает 1 условие (существование двукратного корня уравнения, определяющего координату точки пересечения кривой с прямою; задание касательной с точкой касания дает 2 условия. Задание асимптоты дает 2 условия (обращение в 0 коэффициентов при 3-й и 2-й степени неизвестного в уравнении, определяющем координату точки пересечения кривой с асимптотой). Задание двойной точки дает три условия ($f = 0$, $f' = 0$, $f'' = 0$); задание двойной точки с лучом касательных дает 5 условий и т. д. Если $f'_1 = 0$, $f'_2 = 0$, $f'' = 0$ суть асимптоты линии 3-го порядка, то ее уравнение имеет форму:

$$(*) f_1 f_2 f_3 + ax + by + c = 0.$$

$$286. x^2 y + xy^2 - 2xy - x - y + 1 = 0.$$

$$287. 2xy^2 - x^2 y + 2x^3 - 2y^3 = 0$$

$$288. 10x^3 + 13x^2 y - 3xy^2 - 6y^3 = 0$$

$$289. 81(x-1)^3 + 190(x-1)^2 y - 1 + 133(x-1)(y-1) - 1 + 28(y-1)^3 + (y-x)^3 = 0.$$

$$290. (x-y-1)(x+y-2)(-5x+4y-3) - 8x^2 - 4y^2 - 1 = 0$$

$$291. (x-a+1)(x+y-1)(x+2+x-4a+2) = 0$$

$$292. 160x^3 + 374xy^2 + 269x^2 y - 61x^2 - 2x^3 - 8y^3 = 0$$

$$293. 4x^2 a + 7xy^2 + 4a^2 - 4x^2 - y^2 = 0.$$

$$294. \text{Теорема следует непосредственно из формулы (*)}$$

295. Прямая, соединяющая две двойные точки дуги 3-го порядка, имеет с дугой, по крайней мере, 4 общах точки, следовательно сливается с дугой всеми точками.

296. Вершины: $y \max(a, -2a), x \max(-2a, a)$. Асимптоты $x=0, y=0, x+y=0$. Расположение бескон. ветвей: $x > 0$ при $y = +\infty, y > 0$ при $x = \pm\infty; x+y < 0$ при $x = \pm\infty$.

297. Вершина $x \max(\frac{a}{3}\sqrt{4}, \frac{2}{3}a)$. Перегиб $(0, a)$ с касательной $y=a$. Асимптота $x+y-\frac{a}{3}=0$, при чем левая часть противоположного знака с x при $x = -\infty$. В начале возврат 1-го рода с касательной $y=0$.

298. Вершины: $y \max(-a, \frac{1}{2}, a, \frac{1}{4})$ $x \min(-a, \frac{1}{4}, a, \frac{1}{2})$. Асимптота $x+y+a=0$, при чем левая часть < 0 при $x = -\infty$. В начале узел с касательными $x=0, y=0$.

299. Вершина $y \min(2a, -1, 4a)$ Перегиб $(3a, 0)$ с касательной $x=3a$. Асимптота $y-x-a=0$, при чем левая часть знака противоположного с x при $x = +\infty$. В начале возврат 1-го рода с касательной $x=0$.

300. Вершины $x \max(-4a, 8a), y \min(-\frac{9}{2}a, \frac{27}{4}a)$. Перегиб $(\frac{9}{2}a, \frac{27}{2}a)$. Асимптота $x+y-a=0$, при чем левая часть знака обратного с x при $x = +\infty$. Две параболич. ветви с асимпт. направлением $x=0$. В начале — возврат 1-го рода с касат. $y=0$.

301. Асимптота $x=2a=0$, при чем левая часть < 0 при $y = +\infty$. В начале — возврат 1-го рода с касательной $y=0$.

302. Вершины $y \min(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\sqrt{3}), y \max(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\sqrt{3})$. Асимптоты: $x=a=0$, левая ч. < 0 при $y = +\infty$; $2x+2y-a=0$ левая ч. знака x ; $2x+2y+a=0$ левая ч. знака $-x$. Начало — возврат 1-го рода с касат. $y=0$.

303. Вершина: $x \min(a, 0)$. Два перегиба $(\frac{4}{3}a, \frac{1}{9}a\sqrt{3})$. В начале — изолированная точка. Две параболические ветви с асимпт. направлением $x=0$.

304. Вершины $y \max(\frac{2}{3}a, \frac{2}{9}a\sqrt{3})$; $y \min(\frac{2}{3}a, -\frac{2}{9}a\sqrt{3})$; $x \max(a, 0)$. В начале узел с пучком касательных $x'-y'=0$. Две параболич. ветви с асимптот. направлением $x=0$.

305. Вершины: $x \max \left(\frac{a}{4}, \frac{a}{8} \right), y \max \left(\frac{2}{9}a, \frac{4}{27}a \right)$. В начале узел с касательными $y = 0, y = x$. Две параболические ветви.

306. Вершина: $y \max \left(\frac{4}{9}a, \frac{4}{27}a \right)$. В начале возврат 1-го рода с касательною $y = x$. Две параболические ветви.

307. Вершина: $y \max \left(\frac{3}{4}a, \frac{3}{8}a\sqrt[3]{2} \right)$. В начале точка сплюснутости при касательной $y = x$. Две параболические ветви.

308. Вершины: $x \max \left(\frac{4}{27}a, -\frac{8}{81}a \right), y \min \left(\frac{9}{64}a, -\frac{27}{256}a \right)$. В начале тройная точка с касательными $y^2 = 0, y + x = 0$. Две параболические ветви.

309. Вершины: $y \max \left(\frac{a}{4}\sqrt[3]{2}, \frac{a}{4} \right), x \min \left(-\frac{2}{9}a\sqrt[3]{2}, \frac{2}{9}a \right), x \max \left(\frac{2}{9}a\sqrt[3]{3}, \frac{2}{9}a \right)$. В начале тройная точка с касательными $y = 0, y = \pm x$. Две параболические ветви.

310. Вершина: $y \max \left(\frac{4}{3}a, -\frac{4}{3}a \right)$. Асимптоты: $x - a = 0$ (левая часть знака $-y$), $x + y + \frac{a}{3} = 0$ (левая часть знака $-x$ при $x \rightarrow +\infty$). В начале — точка сплюснутости.

311. В начале — точка сплюснутости. Две параболические ветви с асимпт. параболой $x^2 = ay$.

312. Вершины: $y \max \left(\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}a \right), x \max \left(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}a, -\frac{3}{2}a \right), x \min \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}a, -\frac{9}{2}a \right)$. Перегибы: $\left(\frac{6}{5}a, \frac{6}{5}a \right)$. Асимптоты: $y - x + \frac{a}{2} = 0$ (левая часть знака x), $y + x + \frac{a}{2} = 0$ (левая часть знака $-x$ при $x \rightarrow +\infty$). Две параболические ветви. В начале — точка сплюснутости.

313. Вершины: $x \min \left(\frac{27}{4}a, -\frac{81}{4}a \right), y \max \left(\frac{64}{1}a, -\frac{256}{27}a \right)$. Перегибы: $8a, -16a$. Асимптоты: $y + x + a = 0$ (левая часть знака $-x$ при $x \rightarrow +\infty$). Две параболические ветви. В начале — точка сплюснутости.

314. Вершины: y max-min $(3a, +a\sqrt[4]{20})$, x max $(4a, 0)$.
Начало и точка $(4a, 0)$ — точки сплюснутости.

315. Вершина x max $(4a, 0)$. Точка сплюснутости $(0, 0)$.
Асимптоты $y - x + a = 0$ (левая часть знака x при $x = +\infty$),
 $y + x + a = 0$ (левая часть знака x при $x = -\infty$).

316. Вершины: y max $(+2a, 2a)$, x max-min $(+a\sqrt[4]{27}, a\sqrt[4]{3})$.
В начале тройная точка с касательными $x^2 = 0$, $y = 0$.

317. Асимптоты: $y - x + a = 0$ (левая часть знака x и при $x = +\infty$), $y + x + a = 0$ (левая часть знака x). Пересечения кривой с асимптотами с первой $(\frac{a}{2}(2 + \sqrt[4]{2}), +\frac{a}{2}\sqrt[4]{2})$ со второй $(\frac{a}{2}(2 - \sqrt[4]{2}), -\frac{a}{2}\sqrt[4]{2})$. Перегибы $(+2a\sqrt[4]{27}, 2a\sqrt[4]{3})$. В начале тройная точка с касательными $x^2 = 0$, $y = 0$.

318. Вершины y max-min $(+a\sqrt[4]{\frac{3}{16}}, +a\sqrt[4]{\frac{27}{16}})$, x max-min $(+a\sqrt[4]{\frac{27}{16}}, +a\sqrt[4]{\frac{3}{16}})$. В начале двойной перегиб.

319. Вершины y max $(+a\sqrt[4]{2}, +\frac{a}{2})$, y min $(-a\sqrt[4]{2}, -\frac{a}{2})$,
 x max-min $(-a, 0)$. В начале двойной перегиб с касательными $x = \pm y$.

320. Асимптоты $x - a = 0$ (левая часть $x = 0$ при $y = +\infty$),
 $x + a = 0$ (левая часть $x = 0$ при $y = -\infty$). В начале двойной перегиб с касательными $x = \pm y$.

321. Вершины: x min $(0, +b)$, x max $(\frac{b^4}{a^3}, 0)$. Перегибы:
 $(\frac{11^4}{9a^3}, +\frac{1}{3})$. Две параболы.

322. Вершина x max $(2a, 0)$. Перегибы $(\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a\sqrt[4]{3})$.
Асимптота $x = 0$ ($x > 0$ при $y = +\infty$).

323. Вершины y : $\max - \min \left(\frac{a}{2} \sqrt{5-1}, + \frac{a}{2} \sqrt{5-1} - \sqrt{15-2} \right)$
 x при $(-a, 0)$. В начале узел с касат. $y = +x$. Асимптота $x - a = 0$.
 ($x < a$ при $y = \pm \infty$).

324. В начале двойной перелом с касательными $y = +x$.
 Асимптоты $y = a$ ($y < a$ при $x = \pm \infty$).

325. Вершины: y : $\max - \min \left(\frac{3}{2}a, + \frac{3\sqrt{3}}{4}a \right)$, x : $\max (2a, 0)$, x при
 $\left(-\frac{1}{4}a, + \frac{1}{4} \frac{3}{4}a \right)$. Начало возврата 1-го рода при $x = 0$.

326. Вершины: y : $\max - \min \left(0, + \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$ y при $(+a, 0)$. Асим-
 птоты: $y = + \frac{x}{\sqrt{2}} \left(y^2 < \frac{1}{2}x^2 \text{ при } x = \pm \infty \right)$. Пересечения с асим-
 птотами четыре $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, + \frac{a}{\sqrt{3}} \right)$.

327. I случай: $a^2 > 2b^2$. Вершины: y : $\min (0, b)$, y : $\max (0, -b)$,
 y : $\max - \min \left(+ \frac{a}{2} \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 - b^2}}, + \frac{a^2}{2b \sqrt{a^2 - b^2}} \right)$, x : $\max (a, 0)$; x : $\min (-a, 0)$.
 Переломы (4 точки — на пересечении кривой с прямою y
 $= \pm \frac{a}{b} \sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}} x$.

II случай: $\frac{1}{2}b^2 \leq a^2 \leq 2b^2$. Вершины: y : $\max - \min (0, +b)$, x : $\max - \min$
 $(\pm a, 0)$. Перегибов нет.

III случай: $a^2 < \frac{1}{2}b^2$. Вершины: y : $\max - \min (0, +b)$, x : $\min - \max$
 $(+a, 0)$, x : $\max - \min \left(+ \frac{b^2}{2b \sqrt{b^2 - a^2}}, + \frac{b}{2} \sqrt{\frac{b^2 - 2a^2}{b^2 - a^2}} \right)$. Перегибов — 4,
 как и в I случае.

В начале координат во всех 3 случаях изолированная точка

328. Вершины: y : $\min - \max (0, +b)$,
 y : $\max - \min \left(+ \frac{a}{\sqrt{2}}, + \sqrt{\frac{1}{2}(b^2 - 1/a^2 + b^4)} \right)$, x : $\min - \max (\pm a, 0)$,

$x \text{ max-min } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sqrt{(a^2+1)(a^2-5)} \right)$. Перегибов — восемь точек. В начале — изолированная точка.

329. Вершина: $x \text{ max } \left(\frac{1}{12}, 5 \right)$. Перегиб $\left(\frac{2}{27}, 8 \right)$. Асимптоты: $x=0$ — x одного знака с y при $y \rightarrow \infty$, $y-1=0$ ($y-1$ — 0 при $x = -\infty$).

330. Вершины $y \text{ max } 0, a$; $y \text{ min } \left[b, \sqrt{b \left(\frac{3}{4}a - b \right)} \right]$; $x \text{ max } (a, 0)$; $x \text{ min } \left[\sqrt{b \left(\frac{3}{4}a - b \right)}, b \right]$, где $b = a \left[\frac{9}{16} + \frac{3}{32} \left(\sqrt{24-3} - 2 - \sqrt{24+3} - 2 \right) \right]$. Начало точки соприкосновения с касательной $x-y=0$.

331. Вершины: $y \text{ max } \left(0, \frac{1}{2}a \right)$; $y \text{ min } \left(-a, -\frac{3}{2}a \right)$; $x \text{ max-min } (-a, 2, a)$. Три узла: $(0, -a)$, $(-a, 0)$. Две параболич. ветви.

332. Вершины $y \text{ min } 1, 1$; $y \text{ max } \left(\frac{1-y_0^2}{2y_0}, y_0 \right)$, где y положительн. корень уравнения $y^3 - y^2 - 7y - 1 = 0$ (y около $\frac{1}{7}$); $x \text{ min } (x_0, \frac{x_0^2-1}{2x_0})$, $x \text{ max } (x_1, \frac{x_1^2-1}{2x_1})$, где x_0 и x_1 — два отрицательных корня уравнения $x^4 - 6x^2 - 8x + 1 = 0$ (x_0 около $-\frac{1}{2}$, x_1 около -2).

Асимптоты: $x=0$ — x знака y при $y \rightarrow +\infty$, $y=0$ — y знака x при $x \rightarrow +\infty$, $y-x=0$ — x знака $-y$ при $x \rightarrow +\infty$. В точках $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ кривая пересекает асимптоты. Эти 3 точки лежат на прямой $x+y=2$ — см. зад. 294).

333. Вершины: $y \text{ min } \left(-\frac{10-\sqrt{7}-7\sqrt{7}-10}{18}, -\frac{10-\sqrt{7}-7\sqrt{7}-10}{18} \right)$; $y \text{ max } \left(-\frac{13-1-\sqrt{7}}{18}, -\frac{71-7-10}{18} \right)$; $x \text{ max } \left(-\frac{4}{9}, -\frac{8}{9} \right)$. В начале — враг 1-го рода ($x > 0$). Асимптоты $2x+1=0$ — $2x+1$ знака y при $y \rightarrow +\infty$, $3y-3x-1=0$ — левая часть знака x при $x \rightarrow +\infty$, $6x+12y-1=0$ — левая часть знака $-x$ при $x \rightarrow +\infty$.

334 Вершина: $y \min (0, 0)$. Асимптоты: $y - 1 = 0$ ($y > 1$ при $x = \pm \infty$), $y = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0$ (левая часть < 0 при $x = \pm \infty$), $y + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5} + 1) = 0$ (левая часть < 0 при $x = \pm \infty$), $x = 0$ ($x \geq 0$ при $y = \pm \infty$).

335 Вершины: $y \min \left(3 + \frac{2\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2} + 1}{2}a \right)$,
 $y \max \left(\frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2} - 1}{2}a \right)$, $x \max \left(\frac{3}{2}a \left[\frac{2}{3} - \sqrt{\sqrt{2} + 1} + \sqrt{\sqrt{2} - 1} \right], \frac{1}{2}a \left[\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - 2 \right] \right)$. Начало
 узел с касательными $x = 0$, $y = x$. Асимптота $y + a = 0$ левая часть
 знака $-x$ при $x = \pm \infty$.

336. Вершины $y \max + 2a, 4a$, $x \max \cdot \min \left(\pm 2a\sqrt{2}, \frac{8}{3}a \right)$
 В начале две ветви ($y > 0$) касаются оси x

337. Вершины: $y \max \left(0, \frac{1}{4} \right)$; $x \min \max \left(+ \frac{51 \cdot 15 + 7\sqrt{7}}{8} \right.$
 $\left. \frac{13 + 1105}{16} \right)$; $x \max \cdot \min \left(\pm \frac{5\sqrt{15} - 7\sqrt{7}}{8}, \frac{13 - \sqrt{105}}{16} \right)$. Начало —
 узел с касат. $y = +x$. Асимптоты $y - 1 = 0$ ($y > 1$ при $x = +\infty$),
 $-4x - 8y + 3 = 0$ левая часть знака $-x$ при $x = +\infty$, $4x + 8y + 3 = 0$
 (левая часть знака x при $x = \pm \infty$).

338. Абсциссы 2 вершины $y \max$ определяются уравнением
 $9x^4 + 8x^3 - 15x^2 - 32x - 32 = 0$. В начале — две ветви, касающиеся
 оси x ($a > 0$). Асимптоты: $y - 1 = 0$ ($x > 1$ знака y), $x + 1 = 0$
 ($x < -1$ знака y), $-3x + 3y + 4 = 0$ левая часть знака x при $x =$
 $+\infty$, $6x - 3y - 8 = 0$ левая часть знака x при $x = +\infty$.

339 350. При построении кривых в полярных координатах
 отрицательные значения радиуса-вектора r откладываются на отри-
 цательном направлении лучей (т. е. на полупрямой $\theta = \theta_0 + \pi$ вместо
 полупрямой $\theta = \theta_0$).

339. При $\theta = 0, \pi$ получается $\sin \theta = a$. При $\cos \theta =$
 $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ четыре точки перегиба. Четыре параболические ветви

340. В полюсе узел с касательными $\theta = \frac{\pi}{8}$, $\theta = \frac{3\pi}{8}$; при $\theta = \frac{\pi}{8}$ (и при $\theta = \frac{5\pi}{8}$ для отрицат. r) наибольшее $r = a\sqrt{2}$.

341. Асимптоты: $r \cos \theta = \pm a$. При $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ касательная перпендикулярна к полярной оси. В точках, где $\operatorname{tg}^4 \theta + 2\operatorname{tg}^2 \theta - 1 = 0$, касательные параллельны пол. оси. В точках, где $2\operatorname{tg}^4 \theta - 3\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = 0$ имеются перегибы (два).

342. В точке $(a, \frac{\pi}{2})$ узел. Асимптота: $r \sin \theta = 2a$. При $\theta = 0$ касат. совпадает с пол. осью. При $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ касательная перпендикул. к полярной оси.

343. В точке, где $\theta = 0$, π и $r = a$, имеется узел. При $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ асимптота $r \cos \theta = 2a$. При $\theta = \frac{3\pi}{2}$ касат. перпенд. к полярной оси. При $\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ касательная параллельна полярной оси.

344. Замкнутая прямая в форме вреста. При $\theta = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ наибольшее $r = a$; при $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ наименьшее $r = \frac{a}{2}$. Восемь перегибов определяются условием $\cos 4\theta = \frac{27 - \sqrt{1344}}{15}$.

345. В полюсе тройная точка с касательными $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Привая имеет два завитка, две бесконечные ветви, которые приближаются к асимптоте $r \cos \theta = 0$. Точки перегиба определяются уравнением $8 \cos^6 2\theta + 3 \cos^4 2\theta - 6 \cos^2 2\theta + 10 = 0$, которое имеет один пригодный корень.

346. Строфоида. В полюсе узел с двумя взаимно перпенд. касательными. $\theta = \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\pi + \alpha}{2}$. Асимптота $r \sin (\alpha - \theta) = a \sin \alpha$ пересекает кривую в точке $(a \operatorname{tg} \alpha, \frac{3\pi}{2})$.

347. Конхоида круга. I случай: $a > b$ (Улитка Паскаля). В полюсе узел. Четыре точки с касательными параллельными полярной оси: при $4\cos\theta = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}$. Четыре точки с касательными перпендикулярными к полярной оси: при $\theta = 0, \pi$ и $\cos\theta = -\frac{b}{2a}$. Перегибов нет.

II случай: $a = b$ (Кардиоида). В полюсе точка возврата I рода. Две точки с касательными параллельными полярной оси: $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$. Три точки с касательными перпендикулярными к полярной оси: $\theta = 0, \theta = \pm \frac{2\pi}{3}$. Перегибов нет.

III случай: $a < b < 2a$. Две точки с касательными параллельными полярной оси: при $4\cos\theta = \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}$. Четыре точки с касательными перпендикулярными к пол. оси: $\theta = 0, \pi, \cos\theta = \pm \frac{b}{2a}$. Две точки перегиба: $\cos\theta = \frac{b^2 \pm 2a^2}{3ab}$.

IV случай: $b \geq 2a$. Две точки с касательными параллельными полярной оси, как и в III сл. Две точки с касат. перпендик. к полярной оси: $\theta = 0, \pi$. Перегибов нет.

348. Конхоида прямой Никомеда. I случай: $a < b$. В полюсе узел. Две точки с касательными параллельными полярной оси: $\cos\theta = -\sqrt{\frac{a}{b}}$. Две точки с касательными перпендикулярными к пол. оси: $\theta = 0, \pi$. Две точки перегиба при $2\sec\theta = 3\sec\theta - \frac{b}{a} = 0$ (на правой ветви). Асимптота: $\sec\theta = a$ делит кривую на две отдельные ветви.

II случай: $a = b$. В полюсе точка возврата. Нет точек с касательными параллельными пол. оси. Касательная перпендик. к полярной оси при $\theta = 0$. Перегиба два на правой от асимптоты ветви.

III случай: $a > b$. При $\theta = 0, \pi$ касат. перпендик. к полярной оси. Перегибов четыре: два на правой и два на левой ветви.

349. Три касательные к кривой $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{6}$ в полюсе 3 касательных $y = 0$,
 $y = \frac{2\pi}{3}$. Наибольшие значения x и y при $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

350. Три асимптоты: $x \cos \theta = \frac{a}{3} - 0$, $x \sin \left(\frac{\pi}{6} + \theta \right) = \frac{a}{12}$. Вер-
 нини x касательными параллельными пол. оси при $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.
 В полюсе возмат 1 рода.

351. $y = \frac{a}{1} - \frac{3}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2$, касание 2-го порядка

352. $x = a - 6$, $y = 10 - 0$, касание 3-го порядка

353. $\left(x - \frac{8}{3}a \right) = \frac{2}{3}a \left(\frac{7}{3}a - x \right) - \left(x - \frac{a}{3} \right)^2 - \frac{16}{3}a \left(\frac{11}{3}a - y \right)$

354. 3-го порядка

355. 7-го порядка.

356. Уравнение искомого геометрического места имеет вид
 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, где (x_0, y_0) данная
 точка, y_0 и x_0 значения y' и x' из уравнения данной кривой
 в точке (x_0, y_0) .

357. $\sqrt{3}(x - x_0) = z$, где z и x_0 координаты начала и конца дуги

358. Длина дуги от начала координат

$$\frac{1}{2} \left[1 - 2x - 1 + 2x - \log(1 - 2x + 1 - 2x) \right]$$

359. $\frac{1}{2} \left[1 - 2x - 1 + 2x - \log(1 - 2x + 1 - 2x) \right]$.

360. Длина дуги от $(0,0,0)$ $\frac{1}{2} \left[1 - 2x - 1 + 2x - \log(1 - 2x + 1 - 2x) \right]$

361. $1 - 2x - 1 + 2x$, где x и x_0 координаты начала и конца дуги

362. Длина дуги от $(0,0,0)$: $x + z$.

363. Длина дуги от $(0,1,0)$ $\frac{1}{2} \left[1 - 2x - 1 + 2x - \log(1 - 2x + 1 - 2x) \right]$

364. Длина дуги от $(1,0,1)$: $\sqrt{3}z - 1$.

365. Длина дуги между точками $t = 0$, $t = 1$ $\frac{1}{2} \left[27(3 - 2) - 6 \right]$

366. Длина дуги от $(0,0,0)$: $x + z$.

367—377. В ответах введены следующие обозначения: T — касательная, B — бинормаль, N — главная нормаль, R_1 и R_2 — радиусы первой и второй кривизны, при чем три числа, написанные после T , дают косинусы углов T с осями x , y , z , и т. п.

$$367. T: \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0; B: \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}; N: \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, R_2 = \infty.$$

$$368. T: \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}; B: \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}; N: \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$R_1 = \frac{5}{2}\sqrt{6}, R_2 = \frac{1}{3}.$$

$$369. T: \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0; B: 0, 0, 1; N: -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0;$$

$$R_1 = 2\sqrt{2}, R_2 = \frac{1}{6}.$$

370. Те же числа, как в 369

$$371. T: \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}; B: \frac{4}{\sqrt{41}}, \frac{-3}{\sqrt{41}}, \frac{4}{\sqrt{41}}; N: \frac{3}{\sqrt{82}}, \frac{8}{\sqrt{82}},$$

$$\frac{3}{\sqrt{82}}; R_1 = 2\sqrt{\frac{2}{41}}, R_2 = \frac{41}{18}$$

$$372. T: \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; B: \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}; N: \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{42}}; R_1 = 3\sqrt{\frac{3}{11}}, R_2 = \frac{7}{3}$$

$$373. T: \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; B: \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}; N: \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0;$$

$$R_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2}, R_2 = 3.$$

$$374. T: \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}; B: \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}; N: 0, 1, 0; R_1 = 1,$$

$$R_2 = \frac{4}{3}$$

$$375. F: \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}; B: 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}; N: \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}; R_1 = 6\sqrt{\frac{3}{10}}; R_2 = \frac{5}{2}.$$

$$376. T: 1, 0, 0; B: 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; N: 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; R_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}; R_2 = \infty.$$

$$377. \cos(T, Z) = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos(B, Z) = \sqrt{\frac{2}{3}}; \cos(N, Z) = 0.$$

$$378. z = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \text{ (косой геликонд).}$$

$$379. x \cos t + y \sin t = a, t = \frac{z}{k} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{a} \text{ (развертывающийся геликонд).}$$

$$380. x \cos\left(\frac{\pi}{4} + \log z\right) + y \sin\left(\frac{\pi}{4} + \log z\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} z.$$

$$381. x \cos t + y \sin t = z, t = \log z + \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}.$$

$$382. x \cos t + y \sin t = z, 2t = z + \sqrt{-2 + 4\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}.$$

383. Из сравнения данной прямой с касательной $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$ следует $\frac{x'}{z} = \varphi, x - z\varphi = \varphi_1, \frac{y}{z} = \psi, y - z\psi = \psi_1$. Дифференцирование второго и четвертого из этих равенств дает $z = -\frac{\varphi_1'}{\varphi} = -\frac{\psi_1'}{\psi}$, после чего получается $x = \varphi_1 + z\varphi, y = \psi_1 + z\psi$.

$$384. x = \cos t, y = \sin t, z = t.$$

$$385. x = t \cos t, y = t \sin t, z = t.$$

$$386. x = t \cos t, y = t \sin t, z = t^2.$$

$$387. \text{Т. к. } \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} = 0, \text{ то } R_2 = \infty \text{ во всех точках.}$$

$$388. \text{При } bc_1 = cb_1 \text{ кривая лежит в плоскости } cy - bz = cb_2 - bc_2.$$

$$389. \text{Во всех точках кривой плоскость кривизны } 3x + y - 2z = 0.$$

$$390. R_1 = \frac{1}{\sqrt{2} z^2}, R_2 = \frac{z^2}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

$$391. R_1 = R_2 \cdot 1 + z^2 + \frac{1}{4} z^4. \quad 392. R_1 = R - 2ch^2 z.$$

393. Некая линия определяется системой $f=0, lf'_x + mf'_y + nf'_z = 0$.

394. Линия: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} \lg^2 a - \frac{y^2}{b^4} - \frac{z^2}{c^4} = 0.$

395. Линия: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{k^2}, c < k < a.$

396. Плоскости $lx + my + nz = \pm \sqrt{a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2}.$

397. $4X + 3Y + 12Z = 18, 2X + 6Y + 12Z = 18$

398 $\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 \right) \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) - \left(\frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} + \frac{nz_0}{c^2} \right)^2.$

401. Касат. плоскость. $X [\cos 2\theta \cos \psi f'(\psi) - \sin \psi f''(\psi)] + Y [\cos 2\theta \sin \psi f'(\psi) + \cos \psi f''(\psi)] - Z [\sin 2\theta f'(\psi) + a \sin^2 \theta f^2(\psi)] = 0.$
(Поверхность может быть задана тремя уравнениями $x = a \sin^2 \theta \cos \psi f(\psi),$
 $y = a \sin^2 \theta \sin \psi f(\psi), z = a \sin \theta \cos \theta f(\psi).$

402—404. Уравнение подэрной поверхности относ. начала для данной пов-сти $f(x, y, z) = 0$ получается исключением x, y, z из четырех уравнений: $(X - x) f_x + (Y - y) f_y + (Z - z) f_z = 0,$

$\frac{X}{f_x} = \frac{Y}{f_y} = \frac{Z}{f_z}, f(x, y, z) = 0.$

402 $(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = a^2 X + b^2 Y + c^2 Z^2.$

403. $cXY + Z(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0.$

404 $2Z(X^2 + Y^2 + Z^2) + pX^2 + qY^2 = 0.$

405. $D^2 = (Aa)^2 + (Bb)^2 + (Cc)^2.$

406. $(Aa + Bb + Cc + D)^2 = R^2 (A^2 + B^2 + C^2).$ Точка касания.
 $x = \frac{A(a - R^2) + Bab + Cac - aD}{Aa + Bb + Cc + D}$ и проч.

407 $R^2 + R_1^2 = (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + c - c_1^2.$

408. $R \pm R_1 = \pm \sqrt{(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + c - c_1^2}.$

409. $y - x = \pm (z - 2)^{1/6}.$ (Через данную точку проводим плоскость, удаленную от центров сфер на расстояния, равные их радиусам).

410—412. Решив уравнение $f(x, y, z, a) = 0$ относительно a , получаем $a = F(x, y, z)$ и, продифференцировав его, находим F'_x, F'_y, F'_z , не содержащие параметра a . Исключая затем функцию a из уравнения $z = \varphi(x, y)$ (для чего составляются $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$ и из двух уравнений исключается φ — производная по аргументу $\frac{y}{x}$, получаем в результате уравнение $p F'_x + q F'_y - F'_z = 0$, выражающее условие ортогональности.

413. Легко убедиться, составляя p и q , что $2p + 3q - 1 = 0$.

414. Легко проверить, составляя p и q , что $(b - x)p - yq - b = z$.

415. $(AC - EF)x + 2(CD - EF)y + (EC - F^2)y^2 = CQ$.

$$416. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) = \left(\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} \right)^2$$

$$417. (z - c)^2 = \left[\left(\frac{c}{a} \right)^2 - 1 \right]^2 (x^2 + y^2)$$

$$418. [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2] \{ (a^2 - b^2 + c^2 - R^2) - [a(x-a) + b(y-b) + c(z-c)]^2 \}$$

$$419. \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 \right) \left[\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} \right] - \left[\frac{(x-x_0)x_0}{a^2} + \frac{(y-y_0)y_0}{b^2} + \frac{(z-z_0)z_0}{c^2} \right]^2$$

420. Два конуса: $13x^2 + 13y^2 + 19z^2 - 8xy - 24xz - 24yz + 36x + 36y + 10z - 132 = 0$, $37x^2 + 37y^2 + 5z^2 - 8xy - 24xz - 24yz + 12x + 12y + 36z - 132 = 0$ (Из геометрических соображений определяем вершины 2 конусов $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2\right)$, $(2, 2, 6)$ и татое поступаем, как в 418).

421. Приняв во внимание уравнение нормали

$$\frac{X-x}{2x-l} = \frac{Y-y}{2y-m} = \frac{Z-z}{2z-n}, \text{ и условие совмещения двух прямых}$$

$$\frac{X-x_0}{l} = \frac{Y-y_0}{m} = \frac{Z-z_0}{n}, \quad \frac{X-x_1}{l_1} = \frac{Y-y_1}{m_1} = \frac{Z-z_1}{n_1} \text{ в одной пло-}$$

скости: $\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$, легко докажем требуемый

результат

$$422. (x^2 + y^2 + z^2) (aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 - (ax + by + cz)^2 \frac{a_1^2}{a^2} + b_1^2 + c_1^2$$

$$423. (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2R(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) + R^2(x + y + z)^2 = 0$$

$$424. x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz(x + y + z) - a^2(xy + xz + yz)$$

425. Пересечение поверхности с переменной плоскостью $x + y = a$, перпендикулярною к оси вращения, дает окружности

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = \frac{1}{2}(a - a')^2, \quad x + y = a.$$

426. В пересечении с плоскостью $x + y = a$ получается окружность $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2(3a + \alpha)}{3(a + \alpha)}, \quad x + y = a$.

$$427. x^2 + y^2 = R^2.$$

$$428. x^2 + y^2 = 2a.$$

429. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \frac{1}{a} = (x + y + z)^2$. Прибавляя к обоим неопределенных множителей, давая производные по a, b, c , от функции $ax + by + cz + 1 - (x + y + z) - \mu \left(a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{R^2} \right) = 0$

$$430. \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1, \quad 431. \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{f} = 2z$$

$$432. \log x + ay + at = \log(abt), \quad Aa^2b^2t^2, \quad 433. y^2 = 4ax$$

$$434. x \cos t + y \sin t = a, \quad t = \frac{1}{a} \left[z + \frac{1}{2} (x^2 + y^2 - a^2) \right]$$

$$435. x \cos t + y \sin t = z, \quad t = \log \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \right)$$

$$436. x \cos t + y \sin t = z, \quad 2t = \frac{1}{2} \left[z^2 + 1 \right] \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

437. См. зад. 383.

$$438. x = R \sin u \cos v + \frac{1}{2} p t z^2 v, \quad y = R \sin u \sin v + p t g v, \quad z = R \cos u.$$

$$439. x = R \sin u \cos v + \frac{a^2 \cos v}{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}, \quad y = R \sin u \sin v + \frac{b^2 \sin v}{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}, \quad z = R \cos u$$

$$440. \quad x = R \sin u \cos v = a \cot v, \quad y = R \sin u \sin v = a \operatorname{tg} v, \\ z = R \cos u.$$

441. $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ (восемь плоскостей, образующих правильный октаэдр).

$$442. \quad x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

$$443. \quad |x| + |y| + |z| = l.$$

$$444. \quad x + y = \frac{1}{2} \quad \text{система четырех плоскостей.}$$

$$445. \quad x^4 + y^4 = \frac{1}{16} x^4.$$

$$446. \quad |x| + |y| = |a| \quad \text{как огибающая плоскостей } \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \text{ при условии } \alpha = \beta = \gamma = a.$$

$$447. \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ (см. 446).}$$

$$448. \quad xyz = \frac{2}{9} a^3 \text{ (см. 446).}$$

$$449. \quad 2 \text{ точки } \left(0, +\frac{1}{6}\right), \left(2, \frac{1}{12}\right) \text{ с радиусом кривизны } \sqrt{6}.$$

$$450. \quad 4 \text{ точки: } (a, a, a), (a, -a, a), (-a, a, a), (-a, -a, a) \text{ с радиусом кривизны } a\sqrt{3}.$$

$$451. \quad \left(\frac{a}{9}, \frac{a}{9}, \frac{a}{9}\right) \quad 452. \quad R_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad R_2 = \frac{5}{2} \sqrt{6}.$$

$$453. \quad R_1 = R_2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a}$$

$$454. \quad R_1 = R_2 = \frac{1}{a} \quad \text{Катеноид}$$

$$455. \quad R = \infty, \quad R_2 = \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

$$456. \quad \left[(a + \sqrt{c^2 - c^2 - a^2 - c^2})^2 \right] \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - c^2 - a^2 - c^2}$$

ОТДЕЛ IV.

Геометрические приложения интегрального исчисления.

При решении задач этого отдела полезно иметь в виду следующие определенные интегралы, знание которых значительно сокращает вычисления:

$$\int_0^2 \sin^n x dx = \int_0^2 \cos^n x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx : \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2n+1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^k dx}{1+x^m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{k+1}{m} \pi} \text{ при } 0 < \frac{k+1}{m} < 1.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^k dx}{(1+x^m)^n} = \frac{1}{m} \frac{(1-\lambda)(2-\lambda) \cdot \dots \cdot (n-1-\lambda)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)} \frac{\pi}{\sin \lambda \pi},$$

$$\lambda = \frac{k+1}{m}, \text{ при чем } 0 < \lambda < 1, n \text{ целое.}$$

$$1. p \sqrt{3\sqrt{3}-1}. \quad 2. \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \cdot \frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)} \log \frac{b(\sqrt{a^2+b^2}+b)}{a(\sqrt{a^2+b^2}-a)}$$

$$\text{положить } x = a \cos^4 t, y = b \sin^4 t). \quad 3. 12a \sqrt{3} \quad 4. 18a \sqrt{3} \quad 5. 32a \sqrt{2}.$$

$$6. 10a. \quad 7. a \left(y + \frac{2y^3}{27a^2} \right). \quad 8. 48a. \quad 9. \frac{200\sqrt{15}}{9} a. \quad 10. 6a \sqrt{3}.$$

$$11. 2a \log \frac{t}{2} - a \cos t. \quad 12. \left[\sqrt{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \right]$$

$$+ \frac{1}{8} \log(4 + \sqrt{17}) \Big] a \quad 13. \frac{4(a^3+ab+b^3)}{a+b} \text{ (положить } x = a \cos t,$$

$$y = b \sin^3 t). \quad 14. 5a \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{6} - \log 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right]. \text{ Положить } x = a \cos t,$$

$$y = a \sin^3 t). \quad 15. 6a \quad 16. \sqrt{R} \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad 17. \sqrt{R} \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad 18. a \log \frac{a}{y}.$$

19. $\frac{45}{4}\pi a$. 20. $\frac{16}{3}a$. 21. $3-a$. 22. $\frac{a}{3} \left[\frac{x^2 - y^2}{a^2} - 4 \right]$.
23. $\sqrt{1 - \left(\frac{2a}{y}\right)^2} \left[1 + 2\left(\frac{2a}{y}\right)^2 \right]$. 24. $2a - \sqrt{2x^2 + y^2}$.
25. $2a \left[2 \frac{\sqrt{4x^2 + y^2}}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \log \frac{\sqrt{4x^2 + y^2} + x\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right]$. 26. Поло-
- жить $x = g = a \cosh t$, $y = a \sinh t$, $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \left[(x_2 + y_2)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right] - \right.$
 $\left. - \left[(x_1 + y_1)^2 + (x_1 - y_1)^2 \right] \right\}$. 27. $f(t_1) + f'(t_1) = f(t_2) + f''(t_2)$.
28. $\frac{8}{3}a$. 29. $\frac{3}{2}a^2$. 30. $\frac{16}{3}a$. 31. $\frac{a}{2} \tan u$. 32. $2a(1 - \cos u)$.
33. $a(u - \log \cos u)$. 34. $\frac{2}{3}a(\sec u - 1)$. 35. $a \left[2 \sin u - \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right]$.
36. $\frac{a}{2} \left[\frac{\sin u}{\cos^2 u} + \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right]$. 37. $a \log \frac{1 + \cos u}{2 \cos u} = \frac{a}{2} \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}$.
38. $x = y$. 39. $x = y$. 40. $x = y - 1$. 41. $1 - 2\pi$. 42. $1 - 2 - 1$.
43. $-a \frac{1}{2} \log t$ от $-\infty$ до $+\infty$. 44. $x_1 = y_1 = \frac{2R}{\pi}$. 45. $-a, \frac{1}{3}a$.
46. $\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a \right)$. 47. $\left(\frac{4}{5}a, 0 \right)$. 48. $\left(\frac{a}{2\pi}, \frac{a}{2\pi} \frac{k\pi}{4} \right)$. 49. 2. 50. $\frac{16}{15}$.
51. $\frac{5}{3} \frac{1}{2}$. 52. $\frac{64}{9}$. 53. $\frac{\pi}{8}$. 54. $\frac{1}{10}a^3$. 55. $\frac{8}{15}a$. 56. $\frac{9}{28}a^2$.
57. $\frac{44}{15} \frac{1}{2} p^2$. 58. $\frac{13}{16} \sqrt{2} a^2$. 59. $a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \right)$. 60. $2ab \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right)$.
- положить $x = a \cos t$. 61. $\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) a^2$. 62. $\frac{2}{3} \frac{1}{2} ab(a - b)$.
63. $a \left[-\frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{3}) \right]$. 64. $\frac{2}{3}a^2$. 65. $a^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{\pi}{4} \right)$. 66. $4a^2$.
67. πa^2 . 68. $\frac{4}{3} \frac{a^3}{b^2}$. 69. $\frac{4}{5}a^2$. 70. $\frac{a^2}{2} (2 - 2)$. 71. $\frac{ab}{30}$.
72. $a \left[\frac{1}{2} \log(1 + 1 - 2 - 2) \right]$. 73. $\pi a^2 \left(4 - \frac{5}{2} \frac{1}{2} \right)$. 74. $\frac{1}{2} a^2$.

75. $4-a^2$ (положить $x = 2a \sin^2 t$). 76. $2a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$, $2a^2 \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$ положить $x = a \cos t$. 77. $\frac{1}{2} \int xy - y dx$. 78. $\frac{1}{n^2} (n^2 - 2) \pi R^2$. 79. $\frac{1}{6} ab$ (положить $x = a \cos^4 t$, $y = b \sin^4 t$). 80. $ab \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}$. 81. $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2^{n+1} (1 \cdot 2 \cdots n)^2} \pi ab$. 82. $2\pi ab \frac{1 \cdot 3 \cdots k \cdot 1 \cdot 3 \cdots l}{2 \cdot 4 \cdots 2k \cdot 2 \cdot 4 \cdots 2l} (l + k)$ (подстановка $x = a \cos^2 t$, $y = b \sin^2 t$). 83. $\frac{1}{2} \left[a^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - b^2 \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - ab \right]$. 84. $3\pi - 2a^2$. 85. a^2 . 86. $\frac{\pi}{2} a^2$. 87. $\pi - 2a^2$. 88. $\frac{\pi}{2} a^2 + b^2$. 89. $\frac{1}{2} \pi a^2$. 90. $\frac{\pi}{16} a^2$. 91. $\frac{\pi}{\sqrt{2}} (a^2 + b^2)$. 92. $3\pi a^2$. 93. $\frac{2}{3} \pi (a^2 - b^2)$. 94. $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} a^2 - b^2$. 95. $\frac{\pi a^2}{n}$ при n нечетн., $\frac{\pi a^2}{2n}$ при n четн. 96. $\frac{\pi}{16} a^2$. 97. $\frac{a^2}{210}$. 98. $\frac{a^2}{60}$. 99. $\frac{4a^2}{105}$. 100. $\frac{3}{2} a^2$. 101. $\frac{2\sqrt{3}}{27} a^2$. 102. $\frac{a^2}{8} (6 - \pi - 4 \cos 2)$. 103. $\frac{\pi}{2} a^2$. 104. Внутри круга $a^2 \left(1 - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sqrt{3}\right)$. 105. a^2 . 106. $a^2 \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$. 107. $\frac{1}{2} \pi a^2$. 108. $\frac{a^2}{4} (3 - 2\sqrt{2})$. 109. $a \sqrt{b - a^2} - b \arccos \frac{a}{b} - 2ab \log \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$. 110. $\frac{1}{2} a^2 - 2b^2 \arccos \frac{a}{b} - \frac{3}{2} b \sqrt{a^2 - b^2} + (a^2 - 2b^2) \arcsin \frac{b}{a} + b \sqrt{a^2 - b^2}$. 111. $\frac{\pi}{2} (a^2 + 2b^2)$. 112. $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a^2$, $\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) a^2$. 113. $3\pi a^2$. 114. $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a^2$, $\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) a^2$. 115. $\frac{2}{3} \pi a^2$. 116. $\frac{1}{16} \pi a^2$. 117. $\frac{32}{105} \pi a^2$, $\frac{12}{5} \pi a^2$. 118. $\frac{2}{3} \pi a^2$, $4\pi a^2$. 119. $4\pi a^2$. 120. $\frac{8}{15} \pi a^2$, $\frac{1}{2} \pi a^2 \left[21 \sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})\right]$. 121. $\frac{3}{4} \pi a^2$, $3\pi a^2$, $\frac{72}{25} \sqrt{3} a^2$, $\frac{28}{5} \sqrt{3} a^2$.

$$122. \frac{10}{3} \pi a^2, \frac{1240}{63} \sqrt[3]{5} \pi a^2. \quad 123. 6 \pi a^2, \frac{816}{35} \sqrt[3]{2} \pi a^2.$$

$$124. \frac{\pi a^2}{12} \left[3 \sqrt[3]{2} \log 1 - \sqrt[3]{2} - 2 \right], \frac{\pi^2 \sqrt[3]{2}}{2} a^2, 2(2 - \sqrt[3]{2}) \pi a^2.$$

$$125. \frac{8}{3} \pi a^2, \frac{32}{5} \pi a^2. \quad 126. \frac{\pi a}{6} (2a^2 + 3b^2) + \frac{\pi^2}{2} \sqrt[3]{a^2 - b^2} \log \frac{a + \sqrt[3]{a^2 - b^2}}{b}.$$

$$2\pi \left[a^2 + \frac{b^4}{a^2} \log \frac{a^2 - \sqrt[3]{a^4 - b^4}}{b^2} \right], \frac{\pi b}{6} (2b^2 + 3a^2) + \frac{\pi a^4}{2 \sqrt[3]{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a}, 2 - \left[b^2 + \frac{a^4}{1 - b^4} \arccos \frac{b^2}{a^2} \right].$$

$$127. \frac{256}{315} \frac{\pi b^3}{a^3}. \quad 128. 6 \pi a^2, 16 \pi a^2. \quad 129. \frac{\pi}{2} \left(3\pi^2 - \frac{16}{3} \right) a^2, 4\pi \left(2\pi - \frac{8}{3} \right) a^2.$$

$$130. \pi^2 a^2, \frac{32}{3} \pi a^2. \quad 131. 2\pi^2 a^2. \quad 132. \frac{1}{4} \pi p^2, \frac{2}{3} (2 - 1) \pi p^2, \frac{2}{5} \pi p^2.$$

$$\frac{1}{4} \left[3 \sqrt[3]{2} - \log (1 + \sqrt[3]{2}) \right] \pi p^2. \quad 133. \frac{16}{3} ab. \quad 134. \frac{2}{5} a^2 \sqrt[3]{2} pa.$$

$$135. \frac{1}{20} \frac{a^3}{p^2}. \quad 136. \pi a^2 \sqrt[3]{p^2}. \quad 137. \frac{128}{15} R \sqrt[3]{p^2} R.$$

$$138. \alpha \left(\frac{5}{6} - \frac{\pi}{4} \right) a^2 \text{ сечения можно брать перпендик. } OZ \text{ или } OX.$$

$$139. a^2 \left(2 \sin \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \alpha \right). \quad 140. \frac{\pi R^3}{2a}. \quad 141. \pi (\alpha_1 - \alpha_2) a^2.$$

$$142. \left(21 - 3\sqrt[3]{3} \right) \pi a. \quad 143. \frac{5}{12} \pi a^2. \quad 144. \text{ Нижняя часть } \frac{4}{3} \pi a^2, \text{ с } a^2.$$

$$\text{верхняя часть } \frac{4}{3} \pi a^2, 3a^2 - 3a - a. \quad 145. \text{ Нижний объем } \frac{5}{54} \pi a^3,$$

$$\text{верхний объем } \frac{16}{27} \pi a^3. \quad 146. \text{ Нижняя часть и средняя кольцеобразная равны каждая } \frac{8}{75} \pi R^3,$$

$$\text{верхняя часть } = \frac{92}{75} \pi R^3.$$

$$147. \frac{1}{3} (2 - \sqrt[3]{2}) \pi ab. \quad 148. \frac{1}{2} \sqrt[3]{3} - \frac{5}{3} \pi ab. \quad 149. \frac{1}{3} \pi abc. \quad 150. \text{ Меньшая часть } \frac{5}{24} \pi abc.$$

$$151. \frac{4}{35} \pi abc \text{ (в сечениях } z = z_1 \text{, получаются кривые вида } \left(\frac{x}{a_1} \right)^{3/2} + \left(\frac{y}{b_1} \right)^{3/2} = 1, \text{ площади которых равны } \frac{3}{8} \pi a_1 b_1 \text{ по ре. } z_1).$$

152. $\frac{1}{90} abc$ (в сечении $z = z_0$ получаются кривые $V \frac{x}{a_1} + V \frac{y}{b_1} = 1$, площади которых равны $\frac{1}{6} a_1 b_1$ по рез. ∞).

154—177. Эти задачи решаются проще всего помощью прямоугольной системы координат.

154. $\frac{1}{1} abc$, 155. $\frac{a^2 b^2}{4c}$, 156. $\frac{4}{9} (ab)^2$, 157. πR^3 , 158. $\left(\frac{\pi a}{4} \frac{2}{3} R \right) R^2$.

159. $\frac{a^3}{18}$ (первое интегрирование по x), 160. $\frac{29}{675} a^3$ (сперва интегри-

ровать по x), 161. $\frac{1}{2} \pi a c^2$ (проектировать на плоск. $Y(1)Z$), 162. $\frac{1}{3} abc$.

163. $\frac{a}{6} (\pi - c)^2 (2a + c)$, 164. $\frac{7\pi}{32} ac^2$ (сперва интегрир. по x), 165. $\frac{\pi c^3}{45} abc$.

ввести $x = a \cos t$), 166. $\frac{16a^3}{3 \sin \alpha}$ (сперва интегрир. по x), 167. $\frac{4}{\pi} abc$.

168. $\frac{1}{4} abc$, 169. ab , 170. $4 abc$, 171. $\pi^2 abc$, 172. $\frac{\pi^2 c^3}{ab}$, 173. $\frac{\pi^2 c^3}{4}$.

174. $\frac{c^{k+1}}{(k-1) \cdot (l-1) a^{k-1} b^{l-1}}$, 175. $\frac{4\pi}{27} \frac{3}{2}$ решение задачи требует

введения функций I'). 176. $\frac{1}{16}$ (см. 175) 177. $\frac{1}{2}$ см. 175).

178. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_0^a \int_0^{\frac{a}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}} f(x, y) dx dy$.

179. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_a^{2a} \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y) dx dy$.

180. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_a^{2a} \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y) dx dy$.

$$181. \int_0^a \int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{a-y}{2}} f(x, y) dx dy = \int_0^a \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^a f(x, y) dx dy +$$

$$+ \int_{-\frac{2a}{\sqrt{5}}}^{\frac{2a}{\sqrt{5}}} \int_{-\frac{2a}{\sqrt{5}}}^{\frac{2a}{\sqrt{5}}} f(x, y) dx dy$$

$$182. \frac{1}{6} Mh^2. \quad 183. \frac{1}{5} Mh^2. \quad 184. \frac{8}{35} Mh^2. \quad 185. \frac{35}{36} Mh^2$$

$$186. \frac{8}{5} x, \frac{3}{5} y. \quad 187. \frac{256a}{315\pi}. \quad 188. \left(\frac{\pi}{2} + \frac{8}{9} \right) a, \frac{5}{6} a$$

190 — 216. Эти задачи решаются удобнее всего в полярной системе координат ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$).

$$190. \frac{a^3}{900} 8\sqrt{5} \quad 125\sqrt{2}. \quad 191. \frac{\pi}{8} (a_1 - a_2) \frac{R^2}{c}$$

$$192. \frac{\pi c^3}{8} \left(\text{положить } x = \frac{c}{2} + r \cos \theta, y = \frac{c}{2} + r \sin \theta \right) \quad 193. \frac{3\pi}{32} \frac{a^4}{c}$$

$$194. \frac{81}{32} \pi a^3 \left(\text{положить } x = \frac{a}{2} + r \cos \theta, y = r \sin \theta \right) \quad 195. \frac{a^4}{24c}$$

$$196. \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} \frac{a^4}{c} \quad 197. \frac{\pi a^3}{12} \quad 198. \frac{a^4}{192\sqrt{pq}} \left\{ 19 - 4 \left(\frac{2p+q}{p+q} \right)^2 \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{3}{pq}} (5q - p) \sin \theta \right\} \frac{q}{p} \quad 199. \frac{a^2}{6} \quad 200. 2 - a \left(c^2 + \frac{1}{3} a \right)$$

$$\text{правая часть проецировать на плоск. } YOZ. \quad 201. \frac{2}{9} a^3 \quad 202. \frac{a^2}{16} aR.$$

$$203. \pi R^2 \left[c - \frac{R^2}{4} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \right] \quad 204. \frac{1}{2} \pi a^3 \text{ проецировать на плоск.}$$

$$XOZ) \quad 205. \frac{35}{16} \frac{a^4}{c} \quad 206. \frac{16}{9} (4\sqrt{2} - 5) a^3. \quad 207. \frac{16}{9} (4\sqrt{2} - 5) a^3$$

$$208. \frac{R^4}{16 \sin \alpha} + \frac{R^4}{16} \cot \frac{\alpha}{2} \quad 209. \frac{1}{4} MR. \quad 210. \frac{7}{16} Ma^3. \quad 211. \frac{3\pi}{18} \frac{8}{18} Ma^3.$$

$$212. x = \frac{4R}{3} \quad \text{если принять за оси координат крайние радиусы.}$$

213. На среднем радиусе в расстоянии $\frac{4}{3} \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\alpha} R$ от центра.

214. $x_c = \frac{5}{6} a$, $y_c = \frac{16}{3\pi} a$. 215. $x_c = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} a$, $y_c = \frac{1}{12} \left[3\sqrt{2} \log 1 + \right.$
 $\left. + \sqrt{2} - 2 \right] a$ 216. $x_c = y_c = \frac{4-\sqrt{3}}{27} a$

218. 270. Эти задачи решаются удобнее всего в системе координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

218. $\frac{a^2 b^3}{c^2}$ 219. $\frac{1}{2} \pi ab \left(\frac{a^3}{h^2} + \frac{b^3}{l^2} \right)$ 220. $\frac{3}{8} \pi ab \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{l^4} \right)$
 221. $ab \frac{a^4}{h^4} \left(\frac{a}{h} + \frac{b^2}{l^2} \right) \arctan \frac{ak}{bh}$ 222. $\frac{5}{32} \pi ab \left(\frac{a^6}{h^6} + \frac{b^6}{l^6} \right)$
 223. $\frac{3}{2} \frac{a^2 b^2}{c^2}$ 224. $\frac{\pi}{4} \frac{a^2 b^2}{c^2}$ 225. $\frac{11}{16} \pi \frac{a^2 b^2}{c^2}$ 226. $\frac{\pi}{2} \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{h^2 + l^2}} ab$
 227. $\frac{2}{3} \pi ab \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{l^4} \right)$ 228. $\frac{3}{2} \pi ab$ 229. $\frac{7\pi}{512} \frac{a^3 b^3}{c^3}$ 230. $\frac{\pi\sqrt{2}}{16} \frac{a^3 b^3}{c^3}$
 231. $\frac{1}{210} \frac{b^7}{a^6}$ 232. $\frac{1}{10} \frac{b}{ac^2}$ 233. $\frac{1}{10} \frac{b}{a^6}$ 234. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \frac{ab}{c^2}$
 235. $\frac{1}{6} \frac{a^3 b^3}{c^3}$ 236. $\frac{3\pi}{4} \frac{b^3}{a^3}$ 237. $\frac{8}{15} b^3 \sqrt{\frac{b}{a}} \left(c \sqrt{a} \cos \varphi + b \sin \varphi \right)$
 238. $\frac{\pi}{2} (a_0 \sqrt{\frac{b}{a}})$ (см. 237). 239. $\frac{4}{105} \frac{b^3}{a} \sqrt{\frac{b}{a}}$ (см. 237)

240. $\frac{9}{28} \pi \sqrt{\frac{b}{a}} \left(c \sqrt{a} \cos \varphi + b \sin \varphi \right)$

241. $\frac{1}{16} \frac{a^4}{ab} \sqrt{\frac{b}{a}} \left(c \sqrt{a} \cos \varphi + b \sin \varphi \right)$

242. $\frac{3}{4} \pi \frac{a^4}{b^3} \left(c \sqrt{a} \cos \varphi + b \sin \varphi \right)$

243. $\frac{\pi}{a \sin 2n} \left(\frac{c^2}{b} + \frac{a}{a} \right)^{\frac{2n}{2n-1}} \frac{a^2}{a} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2n}{2n-1}} \left(c \sqrt{a} \cos \varphi + b \sin \varphi \right)^{\frac{1}{2n-1}}$

$$244. \frac{\pi}{n+1} \frac{c^5}{ab} \text{ при } n \text{ нечетном, } \frac{\pi}{2n+1} \frac{c^3}{ab} \text{ при } n \text{ четном (см. 243).}$$

$$245. \frac{4n\pi}{2n+1} ab.$$

$$246. \frac{\pi ab}{8} \left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right).$$

$$247. \frac{1}{8} \frac{a^2 b^2}{c}.$$

$$248. \frac{\pi^2}{2} abc.$$

$$249. \frac{\pi k}{k+1} abc$$

$$250. \frac{4}{9} \frac{a^4 bc}{h^2}.$$

$$251. \frac{2}{3} \frac{a^2 bc}{h}.$$

$$252. \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} abc.$$

$$253. \frac{\pi}{12} \left(\frac{ab}{c} \right)^2.$$

$$254. \frac{\pi}{8} \frac{a^3 b^3}{c^4} \left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right).$$

$$255. \frac{\pi}{32} abc \left(x = \frac{a}{2} + a \cos \varphi, y = b \sin \varphi, \right. \quad 256. \frac{1}{8} \frac{a^2 b^2}{c} \left[\frac{a^2 b^2}{h^2 l^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{4} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{h^4} \right) \right] \quad 257. \frac{ab}{4} \left[\frac{ab}{\sqrt{pq}} + \left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \sqrt{\frac{q}{p}} \right) \right].$$

$$258. \pi abc. \quad 259. 2 ab \text{ (объем каждого кольца).} \quad 260. \text{Объем } n\text{-го кольца}$$

$$(8n-6)abc. \quad 261. \pi abc. \quad 262. \frac{\pi}{16} \frac{ab^3 c}{h^2} \quad 263. \frac{8}{3} abc \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{ka}{b} \right).$$

$$264. \frac{\pi}{8} abc. \quad 265. \frac{16}{9} abc. \quad 266. \frac{16}{9} 4\sqrt{2} abc. \quad 267. \frac{1}{4} Mb^2, \frac{1}{4} Ma^2.$$

$$268. \left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi} \right). \quad 269. \left(\frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \frac{a^4 b}{c^3}, \frac{1}{4} \frac{a^2 b^2}{c^3} \right). \quad 270. \left(\frac{64}{147\pi} \frac{a^3 b}{c^3}, \frac{33}{148} \frac{a^4 b^2}{c^3} \right).$$

271—301. Эти задачи решаются помощью системы координат

$$x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi; \text{ см. также прим. 238 отд. II.} \quad 271. \frac{1}{12} ab.$$

$$272. \frac{1}{10} \frac{a^5 b}{h^4}. \quad 273. \frac{1}{60} \frac{a^3 b^3}{c^4}. \quad 274. \frac{a^3}{4h} \frac{1}{\frac{a}{h} + \frac{b}{k}}. \quad 275. \frac{1}{10} \frac{(ab)^5}{ak + bh^4}.$$

$$276. \frac{1}{210} \frac{a^5 b^3}{c^8}. \quad 277. \frac{1}{6} ab \left(\frac{a^2}{h^3} + \frac{b^2}{k^3} \right). \quad 278. \frac{1}{6} \frac{a^4 b k}{h^4} \frac{ak + 2bh}{(ak + bh^4)}.$$

$$279. \frac{1}{1260} \frac{a^5 b^5}{c^9}. \quad 280. \frac{a^2 lk}{8h^4} (ak + bh^4) (a^2 k^3 + 3ablk + 3b^2 h^2)$$

$$281. \frac{1}{8} ab \left(\frac{a^3}{h^3} + \frac{b^3}{k^3} \right). \quad 282. \frac{ab}{2n-2} \left[\left(\frac{a}{h} \right)^{n-2} + \left(\frac{b}{k} \right)^{n-2} \right].$$

$$283. \frac{(ab)^{2n+1}}{2c^{4n}} \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (4n+1)}. \quad 284. \frac{ab}{12} \left(\frac{a^3}{p} + \frac{b^3}{q} \right)$$

$$285. \frac{13}{72} (2\pi - 3\sqrt{3}) (ab)^{-1} \quad 286. \frac{\pi}{24} (5\sqrt{2} - 4) abc \quad 287. \frac{1}{3} abc.$$

$$288. \frac{k}{2(k-2)} abc \quad 289. \frac{k}{2k-2} abc \quad 290. \frac{1}{\sqrt{2}} abc \quad 291. \frac{1}{500} \frac{a^3 b^3}{c^3}$$

$$292. \frac{5\pi}{512} \frac{(a^3)^3}{c^3} \left(\frac{a^3}{p} \frac{b^3}{q} \right) \quad 293. \frac{1}{5} abc \quad 294. \frac{5\pi}{384} ab^2.$$

$$295. \frac{1}{12} \frac{a^3 b c k}{h(a^3 + b^3)} \quad 296. \text{Объем } n\text{-ой трубки } \frac{4n-3}{\pi} abc \quad 297. \text{Объем}$$

$$\text{каждой трубки } \frac{1}{\pi} abc. \quad 298. \frac{1}{4} abc.$$

$$299. \frac{1}{2} abc. \quad 300. \left(\frac{7}{12} a, \frac{35}{36} b \right) \quad 301. \left(\frac{3\pi}{64} a, \frac{3\pi}{64} b \right).$$

302—312. В этих задачах следует взять координаты $x = ar \cos^4 \varphi$, $y = br \sin^4 \varphi$.

$$302. \frac{7}{128} (2\pi + 3\sqrt{3}) ab. \quad 303. \frac{21\pi}{256} ab \left(\frac{a^3}{h^3} + \frac{b^3}{l^3} \right) \quad 304. \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{a^2 b^3}{c} \right)^{1/5}.$$

$$305. \frac{1}{2} abc. \quad 306. \frac{3}{16} \pi^2 abc. \quad 307. \frac{3k}{11} \frac{1}{2} \pi ab \quad 308. \frac{45\pi}{16384} \left(\frac{ab}{h} \right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} abc.$$

$$309. \frac{15}{256} \pi ab \left(\frac{a^3}{p} \frac{b^3}{q} \right) \quad 310. \frac{2}{9} abc (9\sqrt{3} - 2\pi) \quad 311. \frac{3491}{16384}$$

$$312. \text{Объем каждого кольца } \frac{3}{4} abc.$$

313—319. В этих задачах следует взять координаты $x = ar \cos^4 \varphi$, $y = br \sin^4 \varphi$.

$$313. \frac{55}{64} ab. \quad 314. \frac{1}{12} ab \left(\frac{a^3}{h^3} + \frac{b^3}{l^3} \right) \quad 315. \frac{1}{30} \left(\frac{ab}{c} \right)^{1/5} \quad 316. \frac{1}{24} abc$$

$$317. \frac{k}{2} \frac{abc}{3l-6} \quad 318. \frac{k}{6k-6} abc. \quad 319. \frac{1}{12} \sqrt{\frac{2}{\pi}} abc.$$

320—361. Если область интегрирования на плоскости XOY определяется уравнениями $f(x, y) = u$, $f(x, y) = v$, $F(x, y) = r$, $F(x, y) = \rho$, то берем систему координат u и v , определяемую уравнениями $f(x, y) = u$, $F(x, y) = v$. Решая ее относительно x и y , находим $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ и составляем якобиан J

$$= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}, \text{ после чего интеграл } \iint_G \Phi(x, y) dx dy, \text{ распротра-}$$

ненный по вышеупомянутой области значений x и y , обратится в интеграл $\int_a^u \int_v^w \Theta(\varphi, \psi) J du dv$ с постоянными пределами интегрирования по обоим переменным. Если еще $\Theta(\varphi, \psi) = J$, то предыдущий интеграл приводится к произведению двух простых интегралов $\int_a^u \varphi(u) du \int_v^w \psi(v) dv$.

320. $\frac{7}{120} a^3 \left(x = \frac{au}{u-v}, y = \frac{a}{u-v} \right)$ 321. $\frac{a^4}{2592000} \left[\frac{44797}{p} + \frac{17553}{q} \right]$ см. 320 322. $\frac{3}{2} a^2$ см. 320. 323. $\frac{2}{7} a^2$ см. 320.
324. $\frac{1}{2} (a^2 - b^2) \frac{x^2 - y^2}{1 - x^2 - 1 - y^2} \left(x = \frac{u}{1-v}, y = \frac{uv}{1-v} \right)$.
325. $\frac{2}{3} (a - b) (m - n) (x = uv, y = v)$.
326. $\frac{(a-b)(m-n)}{12c^2} (a^2 - ab + b^2) (m - n) (m^2 - mn + n^2) (a + b)$, (см. 325). 327. $a^2 - b^2 \log \frac{m}{n} \left(x = \frac{u^2}{v}, y = v \right)$ 328. $\frac{e}{e} \frac{1}{(m - n) a^2}$ см. 327 329. $\frac{1}{6} (m^2 - n^2) (x^2 - y^2, x = uv^2, y = uv)$
330. $\frac{2}{27} (m - n^2) (x^2 - y^2)$ (см. 329). 331. $\frac{7^2}{24} \frac{3^2}{e} \frac{m^4}{n^4}$ (см. 329).
332. $\frac{m^2 - n^2}{12\pi} \cos(\pi \beta^4) \cos(\pi \alpha^4)$ (см. 329). 333. $\frac{1}{2} (a^2 - b^2 \log \frac{a}{b}) \left(x = uv, y = \frac{u}{v} \right)$ 334. $\frac{17}{2} \log 3 \cdot \frac{a^4}{e}$ см. 333. 335. $\frac{7}{3} \log \frac{3}{2} a$ (см. 333) 336. $\frac{1}{2} a^2 \left(\frac{6}{p} + \frac{1}{q} \right)$ см. 333 337. $\frac{1}{\pi} (1 - 2 - 2 \log^2 a) c$ (см. 333).
338. $\frac{4}{\pi} (\pi - 1) a c$ (см. 333) 339. $\frac{1}{3} (a - b) (m - n, x = uv, y = uv^2)$. 340. $\frac{5}{4} \frac{a b^2}{c^2}$ (см. 339). 341. $\frac{728}{27} ab$ (см. 339).
342. $\frac{128}{3\pi^2} a$ (см. 339). 343. $\frac{256}{3\pi^2} \pi - 2 a^2$ (см. 339)

$$344. \frac{1}{3} (a^2 - b^2) \log_n^m \left(x = a^{\frac{1}{n}} v^{\frac{1}{n-1}}, y = u^{\frac{1}{n}} v^{\frac{1}{n-1}} \right).$$

$$345. \frac{1}{4} \log 3, a^2 \text{ (см. 344). } 346. \frac{1}{2} \log 2, \frac{a^4}{c} \text{ (см. 344).}$$

$$347. \frac{4}{3\pi} (2 - \sqrt{2}) a b \text{ (см. 344). } 348. \frac{1}{2} (a - b) (c - d) (x = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}},$$

$$y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}). 349. \frac{k-1}{k+1} (a-b), c-d, \left(x = u^{\frac{k-1}{k+1}} v^{\frac{k-1}{k+1}} \right.$$

$$\left. y = u^{\frac{k-1}{k+1}} v^{\frac{k-1}{k+1}} \right). 350. \frac{1}{15} (a^2 - b^2) \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left(x = \frac{u}{n}, y = \frac{u^2}{v^2} \right).$$

$$351. \frac{1}{12} (a^2 - b^2) \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left(x = \frac{u^2}{u^2 + v^2}, y = \frac{v^2}{u^2 + v^2} \right).$$

$$352. \frac{1}{(k+1)(l+1)} \left(a^2 - b^2 \right) \left(\frac{1}{d^k} - \frac{1}{c^k} \right), k = \frac{(k-1)(l+1)}{k-1},$$

$$p = \frac{k-1}{k} - \frac{l-1}{l} = k-2 \left(x = u^{\frac{k-1}{k}} v^{\frac{l-1}{l}} \right).$$

$$y = u^{\frac{k-1}{k}} v^{\frac{l-1}{l}}). 353. \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \frac{k}{k+1} \left(\alpha' - \beta' \right),$$

$$\lambda = \frac{l+1}{k+1} \left(x = uv^{\frac{1}{k+1}}, y = uc^{\frac{1}{k+1}} \right). 354. \frac{1}{k+1} (c^2 - d^2) \log \frac{a}{b}$$

$$\left(x = u^{\frac{1}{k+1}} v^{\frac{1}{k+1}}, y = u^{\frac{1}{k+1}} v^{\frac{1}{k+1}} \right). 355. \left(x = \frac{u}{2}, y = uv \right)$$

$$\frac{1}{3} \left((1-a)(1-b) \right) \left((1-m)(1-n) \right) \left(a+b+m+n+1 \right) ab + \sqrt{mn}$$

$$356. \frac{am(a-m)}{192c} \left[am+3a-m \right] \text{ см. 355.}$$

$$357. \frac{1}{4} (a-b) \left[\frac{\alpha - \beta}{(1+\alpha)(1+\beta^2)} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha^2} \right] \cdot \left(x = \frac{uv}{1 + v^2} \right).$$

$$358. \frac{1}{4} a \operatorname{arctg} \frac{a(b-b_1)}{a^2 + bb_1} + \frac{1}{4} b \operatorname{arctg} \frac{b(a-a_1)}{b^2 + aa_1}$$

$$- \frac{1}{4} a_1 \operatorname{arctg} \frac{a_1(b-b_1)}{a_1^2 + bb_1} - \frac{1}{4} b_1 \operatorname{arctg} \frac{b_1(a-a_1)}{b_1^2 + aa_1}$$

$$+ \frac{1}{4} (a-a_1)(b-b_1) \left(\operatorname{Coor} x = \frac{u}{u^2 + v^2}, y = \frac{v}{u^2 + v^2} \right)$$

$$359. \int \left[v_1 - v_0 \left(\sin 2u_1 - \sin 2u_0 \right) - a_1 - a_0 \sin 2v_1 - \sin 2v_0 \right]$$

$$x = c \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = c \operatorname{sh} u \sin v, \quad 1 - \frac{1}{2} c^2 (\operatorname{ch} 2u - \cos 2v)$$

$$360. \text{ Система } x = \sqrt{r^2 - c^2} \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$\frac{1}{2} (a, b) = \operatorname{arctg} \frac{mn_1 - nm_1}{mn_1 + nm_1} - \frac{1}{2} (m_1 n_1 - mn) \log \frac{a_1 + b_1}{a + b}.$$

$$361. \left(\frac{b_1^2 - b^2 - n_1^2 - n^2}{8r^2} \right) \left(b_1 + b - n_1^2 + n^2 \right) \quad (\text{см. 360}).$$

$$364. \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} f(u - uv, \quad uv, \quad u \, du \, dv).$$

$$365. \int_{-1}^1 \int_0^{\infty} f \left[\frac{xv}{u+v}, \frac{xa}{a+v} \right] \frac{x'v'}{u+v} \, du \, dv.$$

$$366. \int_{\theta = \operatorname{arctg} \frac{b}{2a}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r = \frac{B}{\cos \theta + \sin \theta}}^{\frac{B}{\cos \theta - \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta +$$

$$+ \int_{\theta = \operatorname{arctg} \frac{2b}{a}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{r = \frac{2b}{\sin \theta}}^{\frac{2b}{\sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta.$$

$$367. \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} \left(\frac{au}{u+v}, \frac{a}{u-v} \right) \frac{a^2 \, du \, dv}{(u+v)^2} + \int_{\alpha}^{\infty} \int_{\gamma}^{\frac{1}{u}} f \cdot \frac{a^2 \, du \, dv}{(u+v)^2}.$$

$$368 \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{u}{a} (1-v), w \right) u \, dv \, dw.$$

$$\frac{1}{a} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{u}{a} (1-v), w \right) u \, dv \, dw = \frac{b}{a(a+b)}.$$

369 398 Эти задачи решаются в прямоугольной системе координат.

$$369 \quad 8a^2 \arcsin \frac{b}{a} \text{ первое интегр. по } y, \quad 370. \quad 8a \left[a \arcsin \frac{a}{b} - b + \sqrt{b^2 - a^2} \right], \quad 371 \quad 4a^2, \quad 372. \quad 2a \left[(2a - b) \arcsin \sqrt{\frac{a}{b} + 1} - a - b - a^2 \right],$$

$$373 \quad 8 \sqrt{2ab}, \quad 374. \quad 2\pi a^2, \quad 375 \quad \frac{1}{2} \pi a^2, \quad 376. \quad 2 \sqrt{2} \pi a^2,$$

$$377 \quad \frac{\pi}{3} (3 + 3 - 1) c^2, \quad 378. \quad \pi a (a - c), \quad 379. \quad \frac{8a^2}{3c} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b},$$

$$380 \quad 4ac, \quad 381. \quad \frac{20}{3} c^2 + 2, \quad 382 \quad 4b \sqrt{a^2 - c^2}, \quad 383. \quad \frac{2a}{b} (a - c^2),$$

$$384. \quad \frac{24}{7} a \sqrt{2pa}, \quad 385. \quad \frac{24}{5} a^2, \quad 386. \quad \frac{21}{10} a^2 \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad 387. \quad \pi a, \quad 388. \quad \frac{2}{3} \pi a^2,$$

$$389. \quad 8a^2 (\sqrt{2} - 1), \quad 390. \quad 3\pi ab, \quad 391. \quad \frac{a^2}{54} 10 \sqrt{10} - 1, \quad 392. \quad 16a^2 \sqrt{ap},$$

$$393. \quad \frac{4\sqrt{2}}{3} (a + b) \sqrt{ab}, \quad 394. \quad \frac{1}{3} (\alpha - 3) p^2 \left[\left(1 + \frac{a^2}{p^2} \right)^2 - 1 \right]$$

$$395 \quad \frac{1}{3} p \sqrt{1 - \frac{2a}{p}} \left[\left(1 + \frac{2a}{p} \right) - 1 \right], \quad 396. \quad 4a \left[b + \sqrt{\frac{a}{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a} \right],$$

$$397. \quad \frac{4\sqrt{2}}{105} a^2 \sqrt{2pa} \left[15 \sqrt{a} + 7 \sqrt{2p} \right], \quad 398. \quad \left(a - \frac{1}{4} p \right)^2 \arccos \frac{p - 4a}{p + 4a} + \left(a - \frac{p}{4} \right) \sqrt{ap},$$

399 415 Эти задачи решаются в полярной системе координат.

$$399 \quad \frac{\pi}{4} \left[R \sqrt{1 - \frac{c^2}{R^2}} - R + c \ln \frac{R + \sqrt{c^2 + R^2}}{c} \right].$$

$$400. \frac{2}{3} \pi a^2 \left[\left(\frac{4}{a} - 3 \right)^2 - 1 \right], \quad 401. \frac{\pi}{3} c^2 \sin^2 \alpha \left[\left(1 - \frac{R^2}{c^2 \sin^2 \alpha} \right)^2 - 1 \right].$$

$$402. \frac{1}{2} \pi a \left[1 - a^2 + 9c^2 - \frac{a^2}{3c} \log \frac{3c + \sqrt{a^2 + 9c^2}}{a} \right], \quad 403. \frac{1}{9} a^2 (20 - 3\pi).$$

$$404. \frac{1}{9} c^2 (20 - 3\pi), \quad 405. \frac{4\pi abh}{\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}}, \quad 406. 4\pi h \sqrt{ab}.$$

$$407. \frac{1423}{9720} \pi c^2, \quad 408. 2-a^2 \left[\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \right], \quad 409. \text{Нижняя часть}$$

$$4-c(c-a), \quad 410. \frac{2\pi}{a} \left[a^4 - 1 - a^2 - R^2 \cdot \sqrt{a^4 + (c^2 - a^2) R^2} \right]$$

$$+ 1 - \frac{2-ac^2}{c^2 - a^2} \arctg \frac{\sqrt{c^2 - a^2} \left[\sqrt{a^4 + (c^2 - a^2) R^2} - a \sqrt{a^4 - R^2} \right]}{(c^2 - a^2) \sqrt{a^4 - R^2 + a^2} - a^4 - (c^2 - a^2) R^2}$$

$$411. \frac{2\pi}{a} \left[a^3 - \sqrt{a^2 - R^2} \cdot \sqrt{a^4 + (c^2 - a^2) R^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{-ac^2}{\sqrt{a^2 - R^2}} \log \frac{(a + \sqrt{a^2 - R^2})(1 - \frac{a^2 - R^2}{a^2 - c^2}) - 1}{a - \sqrt{a^2 - R^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^4 + (c^2 - a^2) R^2}}{a^4 - R^2 - a^2 - c^2 + 1 - a^2 - c^2 \sqrt{a^2 - R^2}} \right]$$

$$412. \text{Сферич. поверхн. } 2-a^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} \right), \text{ параб. поверхн. } 2-a^2 \left(1 - 3\frac{1}{2} \right).$$

$$413. \text{Сферич. пов. } 4 - R^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right), \text{ конич. пов. } \pi R^2 \sin \alpha.$$

$$414. 16a^2 (1 - 2 - 1), \quad 415. 16a^2 (1 - 2 - 1), \quad 416. \frac{1}{2} \pi a^2 \int_{\psi_1}^{\psi_2} f(\psi)$$

$$1 - \left[f(\psi_2) \right] - \left[f(\psi_1) \right]^2 d\psi \quad (x = a \sin^2 \theta \cos \psi / f(\psi), \quad y = a \sin^2 \theta \sin \psi / f(\psi),$$

$$z = a \sin^2 \theta \cos \theta f(\psi), \quad p = \frac{1}{\sin^2 \theta f(\psi)} [\cos 2\theta \cos \psi f(\psi) - \sin \psi f'(\psi)],$$

$$q = \frac{\cos 2\theta \sin \psi f(\psi) - \cos \psi f'(\psi)}{\sin^2 \theta f(\psi)}, \quad J = a^2 \sin^2 \theta \sin 2\theta f^2(\psi), \quad 417. \frac{\pi^2 a^2}{2}$$

$$418. \frac{16}{3} \pi a^2, \quad 419. \frac{3}{4} \pi a^2 \left[2 + 1 - 3 \log 2 - 1 \right].$$

$$420. 2\pi \int_0^{16} \sqrt{(\varphi x + \psi \psi')^2 - (\varphi^2 + \psi^2) \omega^2} dt \quad \left(\text{Уравнение поверхности} \right.$$

получается исключением t из системы: $x^2 + y^2 = \varphi^2 + \psi^2$, $z = \omega$; отсюда

$$p = \frac{\omega' \cdot x}{\phi\phi' + \psi\psi'}, q = \frac{\omega' \cdot y}{\phi\phi' + \psi\psi'}, \quad (dr = \phi\phi' + \psi\psi' dt). \quad 421 \quad \frac{2}{3} \pi ab$$

$$(2\sqrt{2} - 1) \cdot 422. \frac{4}{3} (2\sqrt{2} - 1) ab, \text{ arc } tg \sqrt{\frac{a}{b}}. 423. \frac{1}{9} ab (20 - 3\pi)$$

(координаты $x = a\rho \cos \phi$, $y = b\rho \sin \phi$, как в 421 и 422).

$$424. \frac{1}{2} \pi R^2 (\sqrt{2} - 1), (x = R\rho \cos^3 \phi, y = R\rho \sin^3 \phi).$$

$$425. \frac{1}{12c^2} (a^2 + b^2 - a^2 b^2 - 4a^2 c + 4b^2 c) - a^2 b^2 - a^2 \rho \cos^2 \phi - b^2 \rho \sin^2 \phi. 426. \frac{1}{4} \sqrt{a^2 b^2 + 9a^2 c^2 - 9b^2 c^2} - 12c \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\log \frac{3c \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 b^2 + 9a^2 c^2 - 9b^2 c^2}}{ab} \quad (\text{см. 425}).$$

$$427. \frac{4}{15} ab (1 - \sqrt{2}) \quad (\text{см. 425}). \quad 428. \frac{3}{4} c^2 \left[2 + 5 \arcsin \frac{1}{5} \right] \\ (x = c\rho \cos^3 \phi, y = c\rho \sin^3 \phi).$$

$$429. \frac{1}{2} MR^2. \quad 430. \frac{2}{3} MR^2. \quad 431. \frac{55}{65} \sqrt{3} M. \quad 432. \left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{2} \right).$$

$$433. \left(0, 0, \frac{2}{3} \pi \right). \quad 434. \left(0, 0, \frac{55 + 9\sqrt{3}}{130} c \right). \quad 435 \text{ На перпендикуляре,}$$

опущенном из центра сферы на основание сегмента, в расстоянии $\frac{2a}{3}$ от центра сферы. 436 $\frac{4}{3} ab \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) (x = a \cos \phi, y = b \sin \phi).$

$$437. \frac{2\pi a}{c} \left[\frac{1}{(c-a)^2} - \frac{1}{(c+a)^2} \right] \text{ при } \pi > 2, \frac{2\pi a}{c} \log \frac{c+a}{c-a} \text{ при } \pi = 2 \text{ (положить } x = a \sin u \cos v, y = a \sin u \sin v). 438. \text{ Известны координаты } x = a \cos \phi, y = b \sin \phi.$$

$$439 \text{ При } \phi = \alpha: \frac{E}{2 \sqrt{a^2 - b^2}} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \text{ ввести полярные координаты) 440. При } z = b: \frac{E}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{ arc } tg \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{z}$$

$$\text{при } z = b: \frac{E}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{ arc } tg \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

441 476 Эти объемы вычисляются помощью сферических координат $x = \rho \sin \theta \cos \phi$, $y = \rho \sin \theta \sin \phi$, $z = \rho \cos \theta$.

$$441. \frac{1}{3} R^3 (\cos^3 \alpha - \cos^3 \beta), 442. \frac{1}{3} a^3, 443. \frac{1}{3} a^3, 444. \frac{a^3}{360}$$

$$445. \frac{60}{a^4}, 446. \frac{3\sqrt{2}}{8} a^4, 447. \frac{32}{31} a^4, 448. \frac{1}{6} a^4, 449. \frac{64\pi}{105} a^4.$$

$$450. \frac{5\sqrt{2}}{24} a^4, 451. \frac{1}{3} a^4, 452. \frac{32}{315} a^4, 453. \frac{\pi}{168} a^4, 454. \frac{\pi}{12} a^4.$$

$$455. \frac{1}{5} a^4, \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 6 \dots (2n-2)}, \frac{2n-5}{2}, 456. \frac{5}{3} 1 - a^2, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-7)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)}$$

$$457. \frac{1}{2} a^4, 458. \frac{2}{3} a^4, 459. \frac{7}{12} a^4, 460. \frac{4}{6} a^4, 461. \frac{1}{12} a^4.$$

$$462. \frac{2}{3} a^4, 463. \frac{2}{27} 1 - 3 a^4, 464. \frac{1}{9} a^4, 465. \frac{1}{3n \sin \frac{\pi}{n}} a^4.$$

$$466. 2^{-1} R^2 a, 467. \frac{7}{24} (14 + 3 - 1) a^4, 468. \frac{1}{3} (1 - \frac{1}{e}) a^4, 469. \frac{4}{3} a^4.$$

$$470. \frac{2}{3} a^4, 471. \frac{8}{3} a^4, 472. \frac{2}{3} (e - \frac{1}{e}) a^4, 473. \frac{7}{6} a^4, 474. \frac{5\pi^2}{8} a^4.$$

$$475. \frac{7}{1} a^4, 476. \frac{1}{14} a^4 b \sqrt{5a^2 - 2ab + 5b^2}.$$

477 - 506. Эти объемы вычисляются помощью координат $x = a \sin \theta \cos \phi$, $y = a \sin \theta \sin \phi$, $z = c \cos \theta$.

$$477. \frac{7}{72} (e - 3) - 2 a b^2, 478. \frac{7}{3} \frac{a^2 a}{h}, 479. \frac{7}{3} \frac{a^2 a^2}{h}$$

$$480. \frac{1}{360} \frac{a^4 b^4 c^4}{h^4}, 481. \frac{7}{1} \frac{a^4 b^4 c^4}{c^2 - f^2}$$

$$482. \frac{7}{960} \frac{a^4 b^4}{h^4} \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{f} \right) \left(\frac{a^2}{h^4} - 2 \frac{a^2 b^2}{h^4} + \frac{b^2}{f^4} \right), 483. \frac{4}{21} \frac{a^4 b^4}{h^4}$$

$$484. \frac{7}{12} \frac{a^4 b^4}{h^4}, 485. \frac{32}{315} \frac{a^4 b^4 c^4}{h^4}$$

$$486. \frac{7}{12} \frac{a^4 b^4}{h^4} - \frac{1}{n} \frac{1}{h^2 + k^2} \left(2 \frac{a^4}{h^2} - \frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} + 2 \frac{b^4}{k^2} \right), 487. \frac{1}{6} \frac{a^4 b^4 c^4}{h^4}$$

$$488. \frac{1}{3} \frac{abc}{l} \left[\frac{ab}{hk} + \left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2} \right) \left(\operatorname{arctg} \frac{ab}{bh} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad 489. \frac{\pi}{4} \frac{abc}{l} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right)$$

$$490. \frac{\pi-1}{3} \frac{2}{3} \frac{abc}{h}. \quad 491. \frac{\pi^2}{6} \frac{abc^2}{k}. \quad 492. \frac{\pi-1}{3} \frac{2}{3} abc \sqrt{\frac{a'}{h^2} + \frac{b'}{k^2}}.$$

$$493. \frac{\pi}{192} \frac{abc^4}{l^3} \cdot \left(\frac{a'}{h^2} + \frac{b'}{k^2} \right) \left(5 \frac{a^4}{h^4} - 2 \frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} + 5 \frac{b^4}{k^4} \right).$$

$$494. \frac{1}{3} \frac{abc^4}{l^3} \left[\frac{ab}{hk} + \left(\frac{a'}{h^2} - \frac{b'}{k^2} \right) \left(\operatorname{arctg} \frac{ab}{bh} - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$495. \frac{\pi}{96} \frac{abc}{l} \left[3 \frac{a^4}{h^4} + 2 \frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} + 3 \frac{b^4}{k^4} \right] \quad 496. \frac{2}{3} \frac{a^2 h^2 c^2}{l^3}$$

$$497. \frac{2\pi-1}{27} \frac{3}{3} \frac{abc}{h}. \quad 498. \frac{\pi-1}{27} \frac{3}{3} \frac{abc^2}{l} \cdot \left(\frac{a'}{h^2} + \frac{b'}{k^2} \right).$$

$$499. \frac{\pi-1}{27} \frac{3}{3} \frac{abc^2}{l} \left[\frac{ab}{hk} + \left(\frac{a'}{h^2} - \frac{b'}{k^2} \right) \left(\operatorname{arctg} \frac{ab}{bh} - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$500. \frac{\pi}{3n \sin \frac{\pi}{n}} \frac{abc}{l}. \quad 501. 2 \frac{\pi-1}{3} \frac{1}{3} \frac{abc}{l}. \quad 502. \frac{8}{3} \frac{a^4}{h^4} \frac{1}{3} \frac{abc}{l}.$$

$$503. \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \frac{abc}{l}. \quad 504. \frac{4}{3} \frac{abc^2}{l}. \quad 505. \frac{8}{9} \frac{abc^2}{l}. \quad 506. \frac{\pi^2}{3} \frac{abc^2}{l^3}.$$

507 537 Эти задачи решаются помощью системы координат $x = a \varphi \sin \theta \cos \psi$, $y = b \varphi \sin \theta \sin \psi$, $z = c \varphi \cos \theta$ (см. 2) и II.

$$507. \frac{49}{864} \pi^2. \quad 508. \frac{1}{60} \frac{abc^4}{l}. \quad 509. \frac{1}{60} abc \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right) \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right)$$

$$510. \frac{1}{60} abc \cdot \left(\frac{a}{h} \right)^4 \frac{1}{a^2 - b^2} \quad 511. \frac{1}{60} \frac{abch \sqrt{5c+4h}}{(c+h)}$$

$$512. \frac{4}{105} abc \left(\frac{a}{h} \right)^{1/2}. \quad 513. \frac{2}{21} abc. \quad 514. \frac{1}{168} \frac{abc^2}{h}.$$

$$515. \frac{4}{105} abc \cdot \left(\frac{a}{h} \right)^2 \cdot \left(\frac{b}{k} \right)^2 \cdot \frac{a}{h^2 + \frac{b}{k}}. \quad 516. \frac{1}{105} abc \cdot \left(\frac{a}{h} \right)^2 \cdot \frac{a}{h^2 + \frac{b}{k}}.$$

$$517. \frac{1}{168} abc \cdot \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^7 - \left(\frac{b}{k}\right)^7}{\frac{a}{h} - \frac{b}{k}}$$

$$518. \frac{1}{168} abc \cdot \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^7 - \left(\frac{b}{k}\right)^7}{\frac{a}{h} + \frac{b}{k}}$$

$$519. \frac{1}{360} \frac{a^2 b^2 c^2}{h^3}$$

$$520. \frac{1}{12} \frac{abc^4}{h^3}$$

$$521. \frac{\pi}{64} abc \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right) \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$$

$$522. \frac{\pi}{64} abc \cdot \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h} + \frac{b}{k}}$$

$$523. \frac{4\sqrt{3}}{243} \frac{abc^3}{h^3}$$

$$524. \frac{10\pi\sqrt{3}}{3^5 \cdot 7} abc \cdot \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^7 - \left(\frac{b}{k}\right)^7}{\frac{a}{h} - \frac{b}{k}}$$

$$525. \frac{10\sqrt{3}}{3 \cdot 7} abc \cdot \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^7 + \left(\frac{b}{k}\right)^7}{\frac{a}{h} + \frac{b}{k}}$$

$$526. \frac{\pi}{3n \sin \frac{2\pi}{n}} \cdot abc \cdot \left(\frac{c}{h}\right)^{n-3}$$

$$527. \frac{1}{3(n-1)(n-2)} \cdot abc \cdot \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^{n-2} - \left(\frac{b}{k}\right)^{n-2}}{\frac{a}{h} - \frac{b}{k}}$$

$$528. \frac{1}{3} \cdot \frac{(n-k)^2}{(2n-k)(n+2k)} \cdot abc \cdot \frac{\left(\frac{a}{p}\right)^2 - \left(\frac{b}{q}\right)^2}{\frac{a}{p} - \frac{b}{q}}, \lambda = \frac{n+2k}{n-k}$$

$$529. \begin{cases} k \text{ четное} & \frac{1}{3} \cdot \frac{(n-k)^2}{(2n-k)(n+2k)} \cdot abc \cdot \frac{\left(\frac{a}{p}\right)^2 + \left(\frac{b}{q}\right)^2}{\frac{a}{p} + \frac{b}{q}}, \lambda = \frac{n+2k}{n-k} \\ k \text{ нечетн.} & \frac{1}{3} \cdot \frac{(n-k)^2}{(2n-k)(n+2k)} \cdot abc \cdot \frac{\left(\frac{a}{p}\right)^2 - \left(\frac{b}{q}\right)^2}{\frac{a}{p} - \frac{b}{q}}, \lambda \text{ то же.} \end{cases}$$

$$530. \frac{1}{3(n-1)(n-2)} \frac{abc^{n-2}}{h^{n-3}} \quad 531. \frac{(n-k)^2}{3(2n-k)(n+2k)} \cdot abc \cdot \left(\frac{c}{h}\right)^{n-3}$$

$$532. \frac{1}{3} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (3n-1)!} \cdot \frac{(abc)^n}{h^{3n-1}}$$

$$533. \frac{1}{3} abc \quad 534. \frac{7}{6} ch \sqrt{ab}$$

$$535. \frac{1}{3\pi} abc \quad 536. \frac{1}{3} abc \quad 537. \frac{1}{12} abc$$

- 538 - 542.** В этих задачах вводятся координ. $x = a\rho \sin^{\alpha}\theta \cos^{\beta}\psi$,
 $y = b\rho \sin^{\alpha}\theta \sin^{\beta}\psi$, $z = c\rho \cos^{\alpha}\theta$. **538.** $\frac{3}{4} abc [f(\beta) - f(\alpha)]$, $f(0) =$
 $-\frac{1}{3}\cos^{\alpha}\theta - \frac{2}{5}\cos^{\beta}\theta + \frac{1}{7}\cos^{\gamma}\theta$, $\alpha = \beta$. **539.** $\frac{1}{1680} \cdot \frac{(abc)^2}{h^3}$.
540. $\frac{1}{118} \cdot \frac{abc^4}{h^4}$. **541.** $\frac{21 \cdot 2}{1024} abc$. **542.** $\frac{1}{80} \cdot \frac{abc^2}{h}$.
543 - 545. Ввести координ.: $x = a\rho \sin^{\alpha}\theta \cos^{\beta}\psi$, $y = b\rho \sin^{\alpha}\theta \sin^{\beta}\psi$,
 $z = c\rho \cos^{\alpha}\theta$. **543.** $\frac{1}{1} abc$. **544.** $\frac{1}{270} abc \left(\sqrt{\frac{a}{k}} + \sqrt{\frac{b}{k}} \right)$ **545.** $\frac{1}{630} \cdot \frac{abc^2}{h}$
546. Относ. OZ . $\frac{1}{3} M(a^2 + b^2)$. **547.** $\frac{3}{10} MR^2$ (цилиндр. коорд.).
548. $\frac{2}{5} \sin^2 \frac{\alpha}{2} (2 - \cos \alpha) MR^2$ (цилиндр. коорд.). **549.** $\frac{27}{140} Ma'$ (сферич.
 коорд.). **550.** Относ. OZ . $\frac{1}{5} M(a^2 + b^2)$ (коорд. $x = a\rho \sin \theta \cos \psi$ и пр.).
551. $\frac{1}{10} M(a^2 + b^2)$ коорд. $x = a\rho \sin \theta \cos^2 \psi$ и пр. **552.** $\frac{7}{143} M(a^2 + b^2)$
 (координ. $x = a\rho \sin^{\alpha}\theta \cos^{\beta}\psi$ и пр.). **553.** $\left(\frac{3}{5}a, \frac{3}{5}b, \frac{9}{32}c \right)$ прямоуг.
 коорд. **554.** $\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b, \frac{2}{9}c \right)$ Прямоуг. коорд. **555.** $\left(0, 0, \frac{3}{4}c \right)$ Цилиндр.
 коорд. **556.** $\left(0, 0, \frac{1}{2}a \right)$ Цил. коорд. **557.** $\left(0, 0, \frac{2}{3}a \right)$ Цил.
 коорд. **558.** $\left(0, 0, \frac{3}{8}R(1 + \cos \alpha) \right)$ Цил. кр. **559.** $x = a\rho \sin^{\alpha}\theta \cos^{\beta}\psi$,
 $y = b\rho \sin^{\alpha}\theta \sin^{\beta}\psi$, $z = c\rho \cos^{\alpha}\theta$. **560.** $\left(0, 0, \frac{9}{20}a \right)$ Сферич. коорд.
561. $\left(0, 0, \frac{5161\sqrt{3}}{83}c \right)$ Координаты $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$, $z =$
562. $\left(0, 0, \frac{3}{16}(2 + \sqrt{2})c \right)$ Координаты $x = a\rho \sin \theta \cos \psi$ и пр.
563. $\left(\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}b, \frac{1}{4}c \right)$ (Коорд. $x = a\rho \sin^{\alpha}\theta \cos^{\beta}\psi$ и пр. **564.** $\left(0, 0, \frac{7}{30}c \right)$
 см. 563. **565.** $\left(\frac{21}{128}a, \frac{21}{128}b, \frac{21}{128}c \right)$ Коорд. $x = a\rho \sin^{\alpha}\theta \cos^{\beta}\psi$ и пр.

566. $\left(\frac{3}{28}a, \frac{3}{28}b, \frac{3}{28}c\right)$ (Координаты $r = a\sqrt{\sin^2\theta \cos^2\psi}$ и пр.).

567. $\frac{1}{81} (8a^4 - 3b^4 + 3c^4 + 4ab^2 - 4a^2c^2 + 2b^2c^2)$ Сфер. координ.

568. $\frac{1}{4} (a - a_1)(b - b_1)(c - c_1)$. **569.** Легко доказывается из геометрических соображений элемент объема прямоугольный параллелепипед, элемент поверхности — криволинейный прямоугольник).

570. $\frac{-a^2}{4u_0} \left\{ \frac{v_0}{u_0} - \frac{1}{u} \operatorname{arctg} \frac{v}{u_0} \right\}$, $\frac{-a^2}{u_0} \left\{ \frac{v}{u_0} - \frac{1}{u} \operatorname{arctg} \frac{v}{u} \right\}$

(Координатные поверхности $u = u_0$, $v^2 = \eta^2 + z^2 = \frac{a^2}{u_0^2} (x^2 + y^2)$,

$v_0 = \sqrt{x^2 + y^2} = a + \frac{a^2}{r} = 0$, $\psi = \psi_0$, $y = r \operatorname{tg} \psi$).

571. $\frac{2}{3} a^3 \left[(1 - \cos u_0) (\operatorname{ch} v_0 - \operatorname{sh} v_0) - 2 + (\operatorname{ch} v_0 - 1) (\cos^2 u_0 - 3 \cos u_0 - 2) \right]$, $-a^2 \operatorname{sh} v_0 \left[\operatorname{sh} v_0 - \cos u_0 + \operatorname{ch} v_0 - \cos^2 u_0 + \operatorname{ch} v_0 \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 v_0 - \cos^2 u_0}{\operatorname{ch}^2 v_0}} - \operatorname{sh} v_0 \cos u_0 \right]$. (Координ. пов-сти:

$u = u_0$; $\frac{x}{a} = \sin u$, $\frac{z}{a} \cos u_0 = 1$, $v_0 = \frac{r^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 v} = \frac{r^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 v} = 1$,

$\psi = \psi_0$; $y = r \operatorname{tg} \psi$ **572** $\frac{\pi a^3}{\operatorname{sh}^2 u_0} \left[\frac{\sin v_0}{\operatorname{ch} u_0 - \cos v_0} + \right.$

$2 \coth u_0 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \operatorname{th} \frac{u_0}{2} \right) \left. \right]$, $\frac{2\pi a^3}{\operatorname{sh} u_0} \left[\frac{\sin v_0}{\operatorname{ch} u_0 - \cos v_0} + \right.$

$\left. + 2 \coth u_0 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \operatorname{th} \frac{u_0}{2} \right) \right]$. (Координ. пов-сти $u = u_0$; $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2 = 4a^2 \coth^2 u_0 (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 \cot^2 v_0)^2 =$

$\frac{a^2}{\sin^2 v_0}$, $y = x \operatorname{tg} \psi$).

573. При $z > R$: $\frac{M}{z} \left[\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)^{3/2} - \left(\frac{z}{R}\right)^3 - \frac{3}{2} \frac{z}{R} - 1 \right]$ (М масса полусферы. При $z < R$: $\frac{M}{z} \left[\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{3/2} - \left(\frac{R}{z}\right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{z}\right)^2 - 2 \right]$

$$\left(M_1 = \frac{2}{3} \pi z^3 \gamma \right). \quad 574. \text{ При } z > R: \frac{4\pi\kappa}{15z^2} \left[(R^2 + z^2)^{3/2} - z^3 - \frac{5}{2} R^2 z \right] =$$

$$= \frac{8}{15} \frac{M}{R} \left[\frac{5}{2} \frac{3}{4} \frac{R}{z} + \frac{5}{2} \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 6} \left(\frac{R}{z} \right)^3 + \frac{5}{2} \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 6 \cdot 8} \left(\frac{R}{z} \right)^5 + \dots \right], \quad M \text{ масса}$$

$$\text{сферы. } 575. \text{ При } z > R: \frac{M}{R} \left[\frac{R}{z} + \frac{2}{7} \left(\frac{R}{z} \right)^3 \right], \quad M \text{ масса сферы.}$$

$$576. \text{ Потенциальная функция в точке, отстоящей от центра сферы на расстояние } \rho \text{ (независимо от углов } \theta \text{ и } \psi) \text{ равна } \frac{M}{\rho} \text{ при } \rho > R$$

$$(M \text{ масса сферы), и равна } \frac{4\pi}{\rho} \int_0^{\rho} f(\rho) \rho^2 d\rho + 4\pi \int_{\rho}^R f(\rho) \rho^2 d\rho \text{ при } \rho < R.$$

$$577. \text{ При } z > a: \frac{3M}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{z} + \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{z} \right)^3 + \frac{1}{5 \cdot 7} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{z} \right)^5 + \dots \right] \quad (M \text{ масса эллипсоида. } 587. \text{ При } z > b \text{ и}$$

$$z > \sqrt{a^2 - b^2}: \frac{3M}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{z} + \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{z} \right)^3 + \frac{1}{5 \cdot 7} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{z} \right)^5 + \dots \right]. \quad (M \text{ масса эллипсоида.}$$

ОТДЕЛ V.

Интегрирование дифференциальных уравнений.

1—7. Полные дифференциалы.

$$1. \sqrt{x^2 + y^2} + \lg xy + \frac{x}{y} = C. \quad 2. x^4 + x^2 y^2 + y^4 = C.$$

$$3. x^3 + 2y^4 - xy = C. \quad 4. x^3 y + x^2 y^2 = C \ln y.$$

$$5. x^3 - y^4 - x^2 - xy + y^2 = C. \quad 6. y \sqrt{1 + x^2} + x y - y \lg x = C.$$

$$7. x \sin y - y \cos x + \lg xy = C.$$

8—13. Уравнения с отделенными переменными.

$$8. y + C = 2x - \frac{1}{2}x^2 - 2 \lg(1 - x), \quad 9. x^2 + y^2 + 2Cxy - C^2 = 1.$$

$$10. x + y = C(1 - xy), \quad 11. (x + y)(x - y - 2 + 2 \lg \left(\frac{1+x}{1-y} \right)) = C.$$

$$12. x(1 - y^2) = y \sqrt{1 - x^2} + C, \quad 13. \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - y^2} = C.$$

14—21. Уравнения Лаффера: $aydx + bxdy - x^m y^n (fydx - gxdy) = 0$.

$$14. 11x + 8y^2 = Cx^4 y^{11}, \quad 15. 7 + 3y = Cx^2 y^7, \quad 16. 1 + x^3 = Cx^2 y^3.$$

$$17. 5 + 1x^2 y = Cx^{12} y^5, \quad 18. 3 + 2|xy| = Cx^3 y^2.$$

$$19. (7 - 12xy)y^{12} = Cx^{10}, \quad 20. x^{12} y^{15} - 15y(1 - y + 11|1 - x|) = C.$$

$$21. x^3 y^3 = 1 + Cx^2 y.$$

22—34. Уравнения однородные.

$$22. y^2 - 3xy + 2x^2 = C, \quad 23. f_1 y^3 + 3cxy^2 + 3bx^2 y + ax^3 = C.$$

$$24. (x + y)(x^2 + y^2) = C, \quad 25. y - x, y - 2x)^{14} = C(y - x)^9.$$

$$26. (y - x)^8 (y - 2x)^8 = C(y + 2x)^5, \quad 27. (y - x)^5 (y - 3x)^5 = C(y - 2x)^{13}.$$

$$28. (y + x)(y - 2x)^5 = C(y - x)^2 (y + 2x), \quad 29. y(y + 2x)^4 = C(y^2 - x^2).$$

$$30. ax^4 + 4bx^3 y + 2cx^2 y^2 + 4fxy^3 + gy^4 = C, \quad 31. (x^2 - y^2)^4 (x + y)^2 = C.$$

$$32. y^2 = Cx e^{\frac{x}{y}}, \quad 33. y + 1, y^2 - x^2 = Cx^3 e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}.$$

$$34. C^2 x^2 = 1 + 2Cy.$$

35—45. Уравнения, приводимые к однородным.

$$35. x + y - 1 = C e^{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}, \quad 36. (x - 1)(3x + 2y - 1) = C.$$

$$37. x - y - 1 = C e^{\frac{2x+2}{x^2+y^2}}, \quad 38. y - 2x + 3 = C(y - x + 1)^2.$$

$$39. C^2 = C_1 \frac{e^x}{x^2}, z = x - y + 1, \quad 40. \cot(x + y - 1) = \frac{1}{2} \lg(C - 1) - 2.$$

$$41. \frac{1}{3} x + \frac{1}{2} z = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} - \lg(1 - \frac{1}{z}) \right) + C, z = x - y + 2.$$

$$42. y^2 + xy - x^2 - x - y = C, \quad 43. 2x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 6y = C.$$

$$44. 2x^2 + 4xy + 2y^2 + 8x - 4y + C = 9 \lg \left\{ 1 + \frac{x+y-2}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + (2x+2y+1) \sqrt{x^2+2xy+y^2+x+y-2} \right\}$$

$$45. x^2 + 3xy + 3y^2 + 2x + 9y + 13 = Ce^{-\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}(x+2y+3)}{x-5} \right)}$$

46—57. Линейные уравнения.

$$46. y = C \sqrt{x^2 + 2x - 1} + x. \quad 47. y = C \lg x + e^x.$$

$$48. y = C \sqrt{a^2 - x^2} + x. \quad 49. y = C(2x - 1) + \frac{1}{x}. \quad 50. y = C \sqrt{x - x^2}$$

$$51. y = C(3x^2 - 2) + \frac{2}{x} \quad 52. y = C \frac{\sin x}{x} + \cos x. \quad 53. y = Cxe^{-x} + x.$$

$$54. y = \frac{Cx}{x^2 + 1} + \frac{1}{x} \quad 55. y = Cx \lg x + \sqrt{x}. \quad 56. y = \frac{Cx}{x - 1} + x^2.$$

$$57. y = Cx - x^2.$$

58—68. Уравнения Бернулли.

$$58. x^2 - y^2 = a + Cy. \quad 59. y' = Cx^2 + x^3.$$

$$60. y^2 = C \sqrt{x + 1} + x + 1 \quad 61. \frac{1}{y^2} = C \sin x + x \quad 62. \frac{1}{y} = C e^x + \frac{1}{x}$$

$$63. \frac{1}{y^2} = C(x^2 + x) + 1 + x. \quad 64. y^2 = Cx^2 + C \quad 65. y' = Cx + x^2.$$

$$66. \frac{1}{y} = C \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{x}{x^2 + x - 1} \quad 67. y^2 = \frac{Cx}{x^2 - a^2} + x^2.$$

$$68. \frac{1}{y^2} = C \sqrt{x + a^2} + x$$

69—74. Уравнения вида $f(x, y) dx + \varphi(x, y) dy = \psi(x, y) dx dy + q dx$, где f и φ однородные функции одной и той же степени, ψ — однородная функция той же или иной степени.

$$69. C(x^2 - y^2 - Cx^2 + 2xy + \frac{2}{3}y^3). \quad 70. x^2 - y^2 - 2\frac{y}{x} = C \quad 71. y(1-x) = C(y+x)$$

$$72. (1 - e^{x^2+y^2}) = C. \quad 73. (x^2 - y^2) = C(x^2 + y^2) \quad 74. 2x = \frac{Cx}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y}{x} + \lg \left(\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \right) + \frac{x}{1 - x^2 - y^2}$$

75—93. Уравнения 1-го порядка и высших степеней относительно y' , не содержащие одной из переменных: x или y .

$$75. y' + C \sqrt{y} = x^2 - 1. \quad 76. x = \lg p + \sin p, \quad y = C + p(1 + \sin p) - \cos p.$$

$$77. \quad x = p + \arcsin p, \quad y = C - \frac{1}{2} p^2 - \sqrt{1 - p^2}, \quad 78. \quad x = p^2 + e^p,$$

$$y = C - \frac{2}{3} p^3 + C - (p - 1), \quad 79. \quad x = p + \sin p, \quad y = C - \frac{1}{2} p^2 +$$

$$+ p \sin p + \cos p, \quad 80. \quad x = 2p + \log p, \quad y = C - \left(p - \frac{1}{2} \right)^2.$$

$$81. \quad x = p^3 - 2p + 1, \quad y = C - \frac{2}{3} p^3 - p^2$$

$$82. \quad x = \frac{t}{1 + t^2}, \quad y + C = \frac{t(1 + 3t^2)}{1 + t^2} - \frac{1}{t} \arctan t$$

$$83. \quad x + C = \frac{1}{2} \lg \left(y + \sqrt{1 - y^2} \right), \quad \frac{1}{y} \arctan \left(\frac{2\sqrt{1 - y}}{y\sqrt{3}} - y \right),$$

$$84. \quad 4x + C = \lg \left(\frac{\sqrt{y^4 + 1} + y}{\sqrt{y^4 + 1} - y} \right) - 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{y^4 + 1}}{y} \right)$$

$$85. \quad x + C = 2 \arctan p - \lg \left(\frac{1 + \sqrt{1 - p^2}}{p} \right), \quad y = \arcsin p + \lg (1 + p^2).$$

$$86. \quad x + C = \frac{1}{2p^2 + e^p p - 1}, \quad y = \frac{1}{p^2 + p^2 e^p}$$

$$87. \quad C = \lg p - \sin p + p \cos p, \quad y = p + p^2 \cos p.$$

$$88. \quad x + C = a(2 \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha), \quad y = a(\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos \alpha), \quad \operatorname{tg} \alpha = y.$$

$$89. \quad y = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad 2x + C = \frac{1 - 3p}{3p \sqrt{p}}, \quad 90. \quad x + C = 2p - 3p^2, \quad y = p^2 + 2p^3.$$

$$91. \quad x + C = \frac{1}{t} \lg \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right) - \frac{1}{t} \arctan \left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}} \right), \quad y = \frac{t}{1 - t^2}.$$

$$92. \quad x + C = \lg \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right) - 2 \arctan t - \frac{2}{t}, \quad y = \frac{t}{1 - t^2}.$$

$$93. \quad 2x + C = \lg \left(\frac{t^2}{t^2 - 1} \right) - \frac{t + 1}{t - 2}, \quad y = \frac{t + 1}{t - 2}.$$

94 — 136. Уравнения 1-го порядка и высших степеней относительно y' , решаемые относительно y' или y , или x .

$$94. \quad y(y - x^2) = C - y + xy + x^2 + Cx + 0$$

$$95. \quad y' = C \left(x^2 + e^{\frac{1}{x}} \right), \quad y = C^2 e^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right) + 0$$

$$96. y(y^2 - x^2) - C(y + xy^2 - x^3) - C^2x = 0.$$

$$97. \frac{1}{x} - C, \frac{\cot^k\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + k \cos \alpha} = 1 - \frac{k \sin \alpha}{k \cos \alpha} \cdot x.$$

$$98. \text{Особ. реш. } 4xy = a^2. \quad 99. \text{Особ. реш. } y' = -ax.$$

$$100. \text{Особ. реш. } 4y^3 = 27ax^2. \quad 101. \text{Особ. реш. } x' + y' = a^2.$$

$$102. \text{Особ. реш. } 1) x + Vy = Va \text{ или } (x + y - a)^2 - 4xy.$$

$$103. \text{Особ. реш. } x^2 + y^2 = 2ax. \quad 104. \text{Особ. реш. } \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1.$$

$$105. \text{Особ. реш. } x^2 + y^2 = a^2. \quad 106. \text{Особ. реш. } x^2 + 4y = 0.$$

$$107. \text{Особ. реш. } x^2 + y^2 = a^2. \quad 108. \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right) = Ce^{\frac{y}{2}}.$$

$$109. e^{-x} - 2e^{-y} = C. \quad 110. x - C = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y - r}{2}\right).$$

$$111. x = 3\sqrt{p} + \frac{CV\sqrt{p}}{Vp\sqrt{p-1}}, y = 3 + p\sqrt{p} + \frac{C}{Vp\sqrt{p-1}}.$$

$$112. x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, y = \frac{2C}{p} \lg p - 2. \quad 113. x = \frac{C}{p^k} - \frac{2k}{k-2} p^{k-1},$$

$$y = \frac{3C}{2p^2} - \frac{2(k-1)}{k-2} p. \quad 114. x = \frac{C}{p^3} - \frac{4}{p^3} \lg p, y = \frac{1}{p^2} (1 + 6 \lg p) + \frac{3C}{2p^2}.$$

$$115. x = \frac{C}{p^2} - \frac{\cos p}{p^2} - \frac{\sin p}{p}, y = \frac{2C}{p} - \frac{2 \cos p}{p} - \sin p.$$

$$116. x = \cot^2 \alpha (C - \lg \cos \alpha), y = \alpha - 2 \cot \alpha (C - \lg \cos \alpha), \lg \alpha = y'.$$

$$117. x = \frac{1}{\sin^2 t} (C + \cos t), y = t - \frac{2}{\sin t} (C + \cos t), \sin t = y'.$$

$$118. x = \frac{C}{p^3} - 2c \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p^3} \right), y = \frac{3C}{2p^2} - 2c \left(1 - \frac{3}{p} - \frac{3}{p^2} \right).$$

$$119. x = C \cot^2 \alpha - \frac{2}{\sin^2 \alpha} - \frac{4}{3 \sin^2 \alpha}, y = \frac{3C}{2} \cot^2 \alpha - \frac{2}{\cos \alpha}.$$

$$+ \frac{2}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}, \lg \alpha = y'. \quad 120. x = \frac{1}{p} (C - \log(1 + p) - \frac{1}{p}),$$

$$y = 2 \left(\frac{C}{p} - 1 \right) - \left(\frac{2}{p} + 1 \right) \lg(1 + p). \quad 121. x = C \cot \alpha - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

$$y = 2C \cot \alpha - \frac{2}{\sin \alpha} \lg \left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2} \right), \lg \alpha = y'.$$

$$122. \quad x = \frac{1}{(1-p)^2} \left[C + \frac{3}{2} p^2 - p^3 \right], \quad y = \frac{1}{(1-p)^2} \left[C p^2 + p^3 - \frac{1}{2} p^4 \right];$$

$y=0$ особ. реш.

$$123. \quad x = \frac{C}{V t(t-2)}, \quad y = x' \left(t - \frac{3}{2} t \right)$$

$$124. \quad x = \frac{C}{V(t-1)^2(t-3)}, \quad y = x' \left(\frac{1}{2} t^2 + t - 1 \right).$$

$$125. \quad x = \frac{C}{V(t-1)(t-1)^2}, \quad y = x' \left(t^2 + \frac{1}{2} t - 1 \right).$$

$$126. \quad x = \frac{C}{V(t-1)^2(2t+1)^2}, \quad y = x' \left(2t^2 + \frac{1}{2} t - 1 \right).$$

$$127. \quad x = C \frac{t^4(t-2)}{(3t-2)^2(t-1)^2}, \quad y = x' \left(\frac{7}{6} - \frac{2}{3t} \right).$$

$$128. \quad x = \frac{C(t-1)}{(t-2)^2}, \quad y = \frac{1}{6} x' (t-2).$$

$$129. \quad x = C \left(\frac{2t+1}{2t+1} - \frac{1}{3} \right)^{1/2} (2t^2 + 2t - 1)^2, \quad y = x' (t^2 + t^2).$$

$$130. \quad x = C \eta - \eta^2, \quad 131. \quad x = \frac{\eta}{\eta + 1}, \quad y = \frac{C \eta}{\eta - 1}.$$

$$132. \quad x = y (2t^2 - \frac{1}{2} t - 1),$$

$$y = \frac{C}{V(t-1)^2(2t+1)^2}, \quad 133. \quad x = y^2 \left(t^2 - \frac{3}{2} t \right), \quad y = \frac{C}{V t^2(t-2)^2}.$$

$$134. \quad x = y^2 \left(\frac{1}{2} t - 1 \right), \quad y = \frac{C}{V(t-2)^2(t+1)}.$$

$$135. \quad x = y^2 \left(t^2 - \frac{1}{2} t - 1 \right), \quad y = \frac{C}{V(t-1)^2(t-1)^2}.$$

$$136. \quad x = y^2 \left(\frac{1}{2} t^2 - t - 1 \right), \quad y = \frac{C}{V(t-1)^2(t-2)}.$$

137—145. Уравнения высшего порядка, содержащие $y^{(n-1)}$ и $y^{(n)}$.

137. $y + C_2 = \frac{6}{5} (x + C_1) + \frac{5}{12} (x + C_1)^2$ (решить относ. y'').

138. $x + C_1 = \frac{1}{2} \lg t + \frac{3}{4 t^2}$, $y + C_2 = \frac{1}{4} t + \frac{3}{4 t^3}$, $t = y''$ (уравнение дает $y' = z$, как функцию от t , после чего находим $dx = \frac{dz}{t}$, $dy = z dx$).

139. $(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = 1$ (решить относ. y'').

140. $y + C_1 = \lg \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + C_1 \right)$ (см. 139). 141. $y = C_2 + C_2 x - \sin (x + C_1)$ (решить относ. y'''').

142. $y = C_3 + C_2 x + \frac{1}{2} \left(C_1 - \frac{1}{3} \right) x^2 + \frac{1}{6} x^3 \pm \frac{8}{105} C_1 + x)^{3/2}$, (реш. отн. y'').

143. $x + C_2 = z (2 \lg z - 1)$, $y + C_1 = z^2 \lg z$, $z = y'$.

144. $x + C_2 = e^z (z + 1)$, $y + C_1 = z^2 e^z$, $z = y$.

145. $x + C_2 = 2z - \lg (1 + z) + \frac{1}{1 + z}$, $y + C_1 = \frac{z^3}{1 + z}$, $z = y'$.

146—149. Уравнения, содержащие y и y'' .

146. $C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2$. 147. $C_1 \sqrt{C_1 x + C_2} = \sqrt{C_1 y (C_1 y - 1)} + \lg (\sqrt{C_1 y} - \sqrt{C_1 y - 1})$. 148. $3x + C_2 = 4 \sqrt{C_1 + \sqrt{y}} \cdot (\sqrt{y} - 2C_1)$.

149. $\frac{2}{3} x + C_2 = C_1 \lg \left\{ \sqrt{C_1 + \sqrt{y^3}} + \sqrt{y} \right\} - \sqrt{y} \cdot \sqrt{C_1 + \sqrt{y^3}}$.

150—157. Уравнения, не содержащие $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

150. $y = \frac{1}{12} x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3$. 151. $y = -2x + C_1 + C_2 e^{1/x}$.

152. $y = C_2 + \frac{3}{7} (x + C_1)^2 - \frac{3}{4} C_1 (x + C_1)^{3/2}$.

153. $y = C_2 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - C_1 x^2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} C_1 x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} C_1 \arcsin x$.

154. $y = C_1 x^4 - \frac{1}{96 C_1} x^2 + C_2 x + C_3$. 155. $y = C_3 + C_2 x + C_1 \lg x - \frac{1}{2x}$.

156. $y = \frac{1}{2} x \lg x - C_1 \lg (x - 1) + C_2 x + C_3$.

157. $y = C_3 + C_2 x + \frac{4}{15 C_1^2} (1 + C_1 x)^{-1} (C_1 x - 4)$.

158 182 Уравнения, не содержащие x .

$$158. C_1 x + C_2 = \lg \left(\frac{y}{y + C_1} \right).$$

$$159. x + C_1 + C_2 = \lg \frac{\sqrt{y^2 - C_1} - \sqrt{C_1}}{y} \text{ или } x + C_1 + C_2 = \arctg \sqrt{\frac{y^2 + C_1}{C_1}}.$$

$$160. (x + C_2)^2 - y^2 = C_1.$$

$$161. x + C_2 = y^3 + C_1 y.$$

$$162. x + C_2 = \lg \sin (y + C_1).$$

$$163. x + C_2 = C_1 e^{-y}.$$

$$164. C_1 x + C_2 = \lg (C_1 y - 1).$$

$$165. C_1 y + 1 + (C_2 C_1 x + C_3)^2.$$

$$166. C_1 y = 1 - \left(\frac{2}{3} C_1 x + C_2 \right)^2.$$

$$167. x + C_3 = \int \frac{dy}{C_1 + C_2 y + \frac{1}{2} ay^2}.$$

$$168. 1 + y = C_2 e^{-x}.$$

$$169. x + C_1 y + C_2 = (1 + C_1^2) \lg (C_1 + y).$$

$$170. x + C_3 = \frac{1}{C_2} y + \frac{1}{2C_2^2} \lg (C_2 y^2 - y + C_1) + \frac{1 - 2C_1 C_2}{2C_2^3} \int \frac{dy}{C_2 y^2 - y + C_1}$$

$$171. 4x + C_2 = \lg \left| \frac{\sqrt[4]{C_1 + y^4} + y}{\sqrt[4]{C_1 + y^4} - y} \right| - 2 \arctg \left[\frac{\sqrt[4]{C_1 + y^4}}{y} \right].$$

$$172. x + C_2 = \frac{1}{2} y^2 - C_1 y + (C_1^2 - 1) \lg (y + C_1).$$

$$173. x + C_2 = C_1 \arcsin y + \sqrt{1 - C_1^2} \lg |y| + 1 - C_1^2 + C_1 \sqrt{1 - y^2}.$$

$$174. y = C_1 \cdot \coth \left(\frac{x}{2} + C_2 \right).$$

$$175. (C_1 y)^2 - 1 = C_2 e^{C_1 y}.$$

$$176. C_1^2 x + C_2 = \frac{1}{2} C_1 y' + y + \frac{1}{C_1} \lg (C_1 y - 1).$$

$$177. \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} y + C_2 \right) = C_3 e^{C_1 x}. \quad 178. x + C_2 = 2C_1 z + \frac{3}{2} z^2, y = C_1 z^2 + z^3,$$

$z = y'$; уравнение определяет y , как функцию от z , затем x из формулы $dx = \frac{dy}{z}$.

$$179. x + C_1 = C_1 \lg z - \frac{1}{z}, y = C_1 z + \log z, z = y' \text{ (см. 178)}.$$

$$180. x + C_2 = C_1 \lg z + \frac{3}{2} z^2, y = C_1 z + z^3, z = y' \text{ (см. 178)}.$$

$$181. x + C_2 = 2C_1 z - \cos z + z \sin z, \quad y = z^2 (C_1 + \sin z), \quad z = y' \quad (\text{см } 178).$$

$$182. x = C_1 + C_2 y + C_3 y^2 + \iiint \varphi(y) dy^3 \quad (\text{принять } y \text{ за независимую переменную и } x \text{ за ее неизвестную функцию}).$$

183—202. Уравнения однородные относительно y и ее производных

$$183. y = C_2 e^{x^2} (C_1 + x^3). \quad 184. y = C_2 x e^{C_1 (x^2 - x)}.$$

$$185. y = C_2 x^2 e^{C_1 (x^4 - x^2)}. \quad 186. y = C_2 x^3 e^{C_1 x^2}.$$

$$187. y = C_2 e^{\frac{1}{25}(x + C_1)^{\frac{4}{3}}(4x - 3C_1)}. \quad 188. y = C_2 e^{\frac{1}{3}(x^2 + C_1)^{\frac{8}{3}}}.$$

$$189. y^2 = C_2 - C_1 x. \quad 190. y = C_2 e^{C_1 \cos x}. \quad 191. y = C_2 e^{C_1 x^2}.$$

$$192. y = C_2 e^{C_1 (x^4 - x)}. \quad 193. y = C_2 \frac{e^{C_1 x}}{(x + C_1)^{1 + e^{C_1 x}}}.$$

$$194. y = C_2 e^{x \left\{ \frac{1}{2} \lg^2 x + C_1 \lg x + C_2 \right\}}.$$

$$195. y = C_2 (x + \sqrt{1 + x^2})^{C_1} e^{C_1 x (x + \sqrt{1 + x^2})}.$$

$$196. y = \frac{C_2 e^{-x}}{(C_1 - x)^{e^x}}. \quad 197. y = C_2 (x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot e^{-\frac{1}{x}(C_1 + \sqrt{x^2 + 1})}.$$

$$198. y = C_2 e^{\cos(x + C_1)}. \quad 199. y = C_2 \frac{e^{C_1 x}}{(x + C_1 + 1)^{e^{C_1 x}}}.$$

$$200. y = C_2 e^{\frac{1}{12} C_1 x^3 - \frac{1}{x}}. \quad 201. y = C_2 e^{C_1 \operatorname{sh} x} + C_3 \operatorname{ch} x.$$

$$202. y = C_2 (x^2 + C_1)^{C_1}.$$

203—253. Линеинные уравнения.

$$203. y = 1 + C_1 x + C_2 \sqrt{1 + x^2}. \quad 204. y = 1 + C_1 x + \frac{C_2}{x + 1}.$$

$$205. y = C_1 (2x - 1) + \frac{C_2}{x} + x^2. \quad 206. y = x + C_1 \cos(e^x) + C_2 \sin(e^x).$$

$$207. y = \frac{1}{x} + C_1 e^{\frac{1}{x}} + C_2 e^{\frac{2}{x}}. \quad 208. y = x^3 + C_1 x^2 + C_2 (2x - 1).$$

$$209. y = x^2 + C_1 (2x + 3) + \frac{C_2}{x}. \quad 210. y = \frac{C_1}{x} - C_2 x + \sin x.$$

211. $y = C_1 \sin x + C_2 x + \frac{1}{x}$ 212. $y = C_1 x + C_2 e^x + \frac{1}{x}$.
213. $y = \frac{C_1}{x} + C_2 \lg x + x$. 214. $y = C_1 e^{-x} + C_2 \sqrt{x} + x$.
215. $y = \operatorname{ch} x \left(C_1 - \frac{1}{4} x \right) + \operatorname{sh} x \left(C_2 + \frac{1}{4} x^2 \right)$.
216. $y = \cos x \left(C_1 + \frac{1}{4} x - \frac{1}{6} x^3 \right) + \sin x \left(C_2 + \frac{1}{4} x^2 \right)$.
217. $y = C_1 e^{-x} + \left(C_2 - x - \frac{1}{2} x^2 \right) e^x$.
218. $y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \frac{1}{2} (\cos x - \sin x)$.
219. $y = -1 - 3x - x^2 + C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.
220. $y = C_1 + C_2 x - \frac{1}{2} x^2 + C_3 \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x (C_4 + x)$.
221. $y = \frac{3}{16} x + \frac{1}{16} + e^{x\sqrt{2}} (C_1 \cos x \sqrt{2} + C_2 \sin x \sqrt{2}) +$
 $+ e^{-x\sqrt{2}} (C_3 \cos x \sqrt{2} + C_4 \sin x \sqrt{2})$.
222. $y = \frac{1}{4} \cos x + (C_1 + C_2 x) \cdot e^x + (C_3 + C_4 x) \cdot e^{-x}$.
223. $y = e^{-x} (0,04 x + 0,032) + \frac{1}{289} e^x (15 \sin 2x + 8 \cos 2x) +$
 $+ \cos 2x \cdot (C_1 + C_2 x) + \sin 2x \cdot (C_3 + C_4 x)$.
224. $y = \left(\frac{1}{48} x^2 + C_1 x + C_2 \right) e^{2x} + C_3 \sin 2x + \left(C_4 - \frac{1}{32} x \right) \cos 2x$.
225. $y = e^{-x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{4} x^2 \right) + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) +$
 $+ \frac{1}{637} \left(368 \sin^2 x \frac{\sqrt{3}}{2} + 96 \sqrt{3} \cos^2 x \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.
226. $y = \left(\frac{1}{64} x + \frac{1}{128} \right) e^x + \frac{1}{36} \sin x +$
 $+ (C_1 + C_2 x) \cdot \sin (x \sqrt{7}) + (C_3 + C_4 x) \cdot \cos (x \sqrt{7})$.
227. $y = e^{-2x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{5} x^2 \right) + \left(C_3 + \frac{1}{32} x \right) \sin 2x + C_4 \cos 2x$.

$$228. y = (0,01x - 0,008)e^{2x} + \frac{1}{625}e^{-x}(23 \sin x \sqrt{6} - 4\sqrt{6} \cos x \sqrt{6}) + \\ + (C_1 + C_2x) \cos x \sqrt{6} + (C_3 + C_4x) \sin x \sqrt{6}.$$

$$229. y = \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}\right)e^x + (C_1 + C_2x)e^{-x} + \left(C_3 - \frac{1}{8}x\right)\cos x + C_4 \sin x.$$

$$230. y = \left(\frac{1}{120}x^5 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4\right)e^{-x} - \frac{1}{625}(21 \cos 2x + \\ + 72 \sin 2x).$$

$$231. y = \frac{1}{24}x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3 + \left(\frac{3}{32}x + C_4\right)\sin 2x + C_5 \cos 2x.$$

$$232. y = \frac{1}{24}x^4 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + C_5\right)e^x.$$

$$233. y = x + C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{\frac{\sqrt{-3}}{2}x} \left(C_3 \cos \frac{x}{2} + C_4 \sin \frac{x}{2}\right) + \\ + e^{-\frac{\sqrt{-3}}{2}x} \left(C_5 \cos \frac{x}{2} + C_6 \sin \frac{x}{2}\right).$$

$$234. y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \left(\frac{1}{4} \cos 2x \cdot \lg \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x\right).$$

$$235. y = C_1 e^x + C_2 + (e^x + 1) \lg(1 + e^{-x}). \quad 236. y = C_1 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + \\ + C_2 + \lg \operatorname{th} \frac{x}{2} + (\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x) \cdot (x + \lg \operatorname{sh} x). \quad 237. y = \frac{1}{x} + C_1 e^x + \\ + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}. \quad 238. y = \frac{1}{\sin x} + C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 e^{-x}.$$

239. $y = C_1 \cos(2x + 3y) + C_2 \sin(2x + 3y)$ (ввести новую независ. перем. $u = 2x + 3y$). 240. $y = \frac{e}{2} + C_1 \operatorname{ch} \frac{2}{x} + C_2 \operatorname{sh} \frac{2}{x}$ (ввести независ. перем. $u = \frac{1}{x}$). 241. $y = x \left[C_1 \operatorname{ch} \frac{e}{x} + C_2 \operatorname{sh} \frac{e}{x} \right]$ (ввести новую независ. переменную u и новую функцию v уравнениями $u = \frac{1}{x}, v = \frac{y}{x}$).

$$242. y = C_1 + C_2 \lg x. \quad 243. y = C_1 \cos \lg x + C_2 \sin \lg x + x.$$

$$244. y = (2x + 1) \cdot (C_1 + C_2 \lg(2x + 1)) + x.$$

245. $y = \frac{C_1}{x-4} + C_2(x-4)^{\frac{5+\sqrt{15}}{2}} + C_3(x-4)^{\frac{5-\sqrt{15}}{2}} +$
 $+(x-4)^2 \left\{ \frac{2}{27} - \frac{1}{18} \lg(x-4) \right\}. \quad 246. y = \frac{C_1}{2x+3} +$
 $+ \sqrt{2x+3} \left\{ C_2 \cos \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \lg(2x+3) \right] + C_3 \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \lg(2x+3) \right] \right\} +$
 $+ \frac{1}{16} \left\{ \sin \lg(2x+3) + \cos \lg(2x+3) \right\}. \quad 247. y = (x+1) \left\{ C_1 + \right.$
 $+ C_2 \lg(x+1) - \frac{1}{18} \lg^2(x+1) - \frac{1}{18} \lg^3(x+1) \left. \right\} + C_3(x+1)^{\frac{1}{2}}.$
248. $y = \frac{1}{2x-1} \left\{ C_1 + \frac{1}{24} \lg^2(2x-1) + \frac{1}{48} \lg^3(2x-1) \right\} +$
 $+ \sqrt{2x-1} \left\{ C_2 \cos \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \lg(2x-1) \right] + C_3 \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \lg(2x-1) \right] \right\}.$
249. $y = 2 + \frac{1}{x} \left\{ C_1 + \frac{1}{5} \lg x + \frac{1}{10} \lg^2 x \right\} + C_2 x^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + C_3 x^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$
250. $y = \frac{1}{x+2} \left\{ C_1 + \frac{1}{3} \lg(x+2) + \frac{1}{6} \lg^2(x+2) \right\} +$
 $+ \sqrt{x+2} \left\{ C_2 \cos \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \lg(x+2) \right] + C_3 \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \lg(x+2) \right] \right\}.$
251. $y = C_1 x + C_2 x^2 + e^x \quad 252. y = \frac{C_1}{x} + C_2 x + \sin x.$
253. $y = C_1 \sqrt{x} + \frac{C_2}{\sqrt{x}} + \lg x. \quad 254. x = t + C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$
 $y = 1 + C_1 \sin 2t - C_2 \cos 2t.$
255. $x = t^3 + t + C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t},$
 $y = t + 1 + 2C_1 e^{2t}.$
256. $x = C_1 + C_2 t + t^2,$
 $y = \frac{C_1}{t} + 2C_2 + \sin t. \quad 257. x = t - 1 + C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t.$
 $y = \frac{1}{t} + C_1 e^{-t} \sin t - C_2 e^{-t} \cos t.$
258. $\frac{C_1 x^2 + 2}{\sqrt{C_1 x^3 + 1}} = C_1^2 t + C_2, y = \frac{x}{\sqrt{C_1 x^3 + 1}}.$

$$\begin{aligned}
 259. \quad x &= C_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left[C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right], \\
 y &= C_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left[-\frac{1}{2} (C_2 + \sqrt{3} C_3) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} (C_2 - \sqrt{3} C_3) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right], \\
 z &= C_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left[-\frac{1}{2} (C_2 - \sqrt{3} C_3) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \right. \\
 &\quad \left. -\frac{1}{2} (C_2 + \sqrt{3} C_3) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right].
 \end{aligned}$$

$$260. \quad x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \quad y = C_1 e^{-t} - C_2 e^{2t}, \quad z = -(C_1 + C_2) e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

$$\begin{aligned}
 261. \quad x &= C_1 + C_2 e^{3t} + C_3 e^{-3t}, & 262. \quad x &= C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}, \\
 y &= \frac{1}{3} C_2 e^{3t} - C_3 e^{-3t}, & y &= \frac{3}{2} C_1 e^{3t} - C_2 e^{-2t} + C_3 t^{-1}, \\
 z &= \frac{2}{3} C_2 e^{3t} + 2 C_3 e^{-3t}, & z &= \frac{3}{2} C_1 e^{3t} - C_2 e^{-2t} - C_3 t^{-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 263. \quad x &= C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3, & 264. \quad x &= C_1 + C_2 t + C_3 e^t, \\
 y &= \sin t - C_1 t - C_2 t^2, & y &= C_1 - 2 C_2 t + C_3 e^t, \\
 z &= \cos t - C_1 t - C_2 t^2, & z &= -C_1 - C_2 t + 2 C_3 e^t.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 265. \quad x &= C_1 e + C_2 \sin t + C_3 \cos t, \\
 y &= t - C_1 e^2 + C_2 \cos t - C_3 \sin t, \\
 z &= 1 + C_2 \sin t + C_3 \cos t.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 266. \quad x &= C_1 e^{-2t} + C_2 \sin 4t + C_3 \cos 4t, \\
 y &= -\frac{1}{4} C_1 e^{-2t} + \frac{1}{2} C_2 \cos 4t - \frac{1}{2} C_3 \sin 4t, \\
 z &= -\frac{1}{4} C_1 e^{-2t} + C_2 \sin 4t + C_3 \cos 4t.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 267. \quad x &= C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t + C_3, & 268. \quad x &= C_1 + C_2 t, \\
 y &= t + (C_1 + C_2) \cos 2t - (C_1 - C_2) \sin 2t, & y &= C_3 t^2 - \frac{3}{4} C_1, \\
 z &= 3 + (C_2 + C_1) \sin 2t + (C_2 - C_1) \cos 2t, & z &= \frac{5}{4} C_1 - C_2 t + C_3 t^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 269. \quad x &= C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t}, & 270. \quad x &= C_1 e^t + C_2 e^{3t} + C_3 e^{5t}, \\
 y &= C_1 + C_2 e^{-t}, & y &= \frac{1}{2} C_1 e^t + \frac{1}{2} C_2 e^{3t}, \\
 z &= -C_1 - C_2 e^t - 2 C_3 e^{-t}, & z &= -C_1 e^t - C_2 e^{3t} - \frac{3}{2} C_3 e^{5t}.
 \end{aligned}$$

$$271. z = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t}, \quad x = C_2 + 2C_3 e^{2t}, \quad y = -(C_1 + C_3) - C_3 t + C_3 e^{2t}.$$

$$272. z = x + y + \Phi(xy), \quad z = x + y + \frac{x^2 y^2}{a^2} - \frac{xy}{a} + a^2 - a.$$

$$273. z = xy + \Phi(x^2 + y^2), \quad z = xy + x^2 + y^2 - 2a^2 - a\sqrt{x' + y^2 - a^2}.$$

$$274. z = xy + \Phi(x^2 - y^2), \quad z = xy + 1 + (2 - a)\sqrt{a^2 - x^2 + y^2} + 3(a^2 - x^2 + y^2).$$

$$275. z = x + y + \Phi(x^2 + y^2), \quad z = x + y - 1 - \sqrt{x + y^2 - 1} + \frac{1}{2} \lg(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$$

$$276. z = x + y + \Phi\left(\frac{x+1}{y+1}\right), \quad 277. z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \Phi(x^2 - y^2 - 2xy),$$

$$278. z = \frac{1}{2}(y - x) + \Phi\left[\frac{y^3(y-2x)}{y+x}\right].$$

$$279. z^2 = e^x - 2y^2 + \Phi[e^{-x}(y^2 + x + 1)].$$

$$280. v = x + y + z + \Phi(x^2 + y^2, yz), \quad v = x + y + z - \sqrt{x^2 + y^2 - y^2 z^2 - yz - 1 + x^2 + y^2 + yz} \sqrt{x^2 + y^2 - y^2 z^2}.$$

$$281. v = \frac{x}{z} + \Phi(xy, xz), \quad v = \frac{x}{z} - xz + \frac{1}{x^2 z^2} - \frac{z^2}{y^2}.$$

$$282. v = \frac{xy}{z} + \Phi(x^2 + y^2, y + z), \quad v = \frac{xy}{z} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{y + z} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + 2(x^2 + y^2 - 1) + (y + z)^2 - 2(y + z)\sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$$

$$283. v = x^2 + y^2 + z^2 + \Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right), \quad v = x' + y^2 + z^2 - \frac{2yz}{x^2} - 1.$$

$$284. v = \sqrt{x^2 - z^2} + \Phi\left(\frac{x^2}{z}, \frac{y}{z}\right), \quad v = \sqrt{x^2 - z^2} - \sqrt{\frac{x^2}{z} - 1} + \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z^2}.$$

$$285. v = \sin(xyz) + \Phi\left(x + y + z, \frac{x}{z}\right), \quad 286. x = \frac{2}{3}y\sqrt{\frac{y}{a}} - \frac{1}{2}\sqrt{ay}.$$

$$287. x = \frac{1}{3}a + \frac{a^2}{2y} + \frac{y}{6a^2}, \quad 288. r = \frac{a}{2}\left(\cos\frac{y}{a} + \log\operatorname{tg}\frac{y}{2a}\right).$$

$$289. y = \frac{1}{3}a + \frac{a^2}{6x} + \frac{x^3}{2a^2}, \quad 290. y = \frac{1}{4}a \cdot \log\frac{x}{a} - \frac{1}{2}a - \frac{x^2}{2a}.$$

$$291. r = a\sqrt{2e^{\frac{r}{4}} - 6}.$$

292—296. Продифференцировать предложенное уравнение, заменив y_1 на y , s_1 на s , и ввести $ds = \frac{dy}{\sin \alpha}$, после чего определится y , как функция от α , и затем из формулы $dx = dy \cdot \cot \alpha$ найдется x , как функция от α .

$$292. x = x_0 + \frac{1}{1} \left[\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right], y = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

$$293. x = x_0 + a \left[\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha \right], y = a \sin \alpha.$$

$$294. x = x_0 + \frac{a}{8} [2\alpha + \sin 2\alpha], y = \frac{a}{8} (1 - \cos 2\alpha).$$

$$295. \left(y - \frac{1}{9} a \right)^3 = a (x - x_0)^2. \quad 296. y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a}$$

297 300. Продифференцировать предложенное уравнение, отбросив значок, ввести $d\psi = \frac{1}{\cos \mu} dr$, $T = \frac{r}{\cos \mu}$, $N = \frac{r}{\sin \mu}$, $S = r \operatorname{tg} \mu$, $P = r \sin \mu$, после чего определится r , как функция от μ , а затем найдется θ , как функция μ , из уравнения $dh = \frac{dr}{r} \operatorname{tg} \mu$ (в ответах μ заменено на u).

$$298. r = \frac{a \sin u}{V \sin u - \cos u} e^{\frac{1}{2} u}$$

$$297. r = a e^{m \theta}.$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2} \{ u - \operatorname{tg} (\sin u - \cos u) \}.$$

$$299. r = a \sqrt{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right)} \cdot e^{\frac{1}{2} \frac{\sin u}{1 + \cos u}}$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{3} \left\{ \frac{1 + \sin u}{\cos^3 u} - \operatorname{tg} u \right\}.$$

$$300. r = \frac{a}{V 1 - \sin u \cos u} e^{\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} u}{V 3} \right)}$$

$$\theta = \theta_0 - u + \frac{2}{V 3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{tg} u - 1}{V 3} \right).$$

301 307 Имя в виду выражение $Q = \int y dx$, дифференцируем данную формулу и приходим к дифференц. уравнению между x и y .

$$\mathbf{301.} \quad y = a(y - a). \quad \mathbf{302.} \quad y^2 = \frac{2}{3} ax. \quad \mathbf{303.} \quad r^2 = a^2 - (y^2)^3 = a^2.$$

$$\mathbf{304.} \quad y = b(1 + e^{2-x}). \quad \mathbf{305.} \quad x^2 y^2 = a^2(x^2 + y^2). \quad \mathbf{306.} \quad y = b e^{x/a}.$$

$$\mathbf{307.} \quad y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

$$\mathbf{308 - 314.} \quad \text{Принимая во внимание выражение } Q = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta,$$

продифференцировать предложенное уравнение, что дает дифф. уравнение между r и θ .

$$\mathbf{308.} \quad r = \frac{a\theta_1}{\theta_1 - \theta} \quad (\theta_1 \text{ произв. пост.}). \quad \mathbf{309.} \quad r^2 = a^2 \theta.$$

$$\mathbf{310.} \quad r = a \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\theta - \theta_0}{\theta_0}} \right). \quad \mathbf{311.} \quad r^2 = a^2 (e^{\theta} - 1). \quad \mathbf{312.} \quad r = a \operatorname{tg} \theta.$$

$$\mathbf{313.} \quad r = \frac{a}{6} (\theta - \theta_0). \quad \mathbf{314.} \quad (\theta_0 - \theta, r = a. \quad \mathbf{315.} \quad y = C e^{\frac{x-1}{2}}.$$

$$\mathbf{316.} \quad y(a - x) = b^2. \quad \mathbf{317.} \quad x = a + b \left(\cos \alpha + \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right), \quad y = b \sin \alpha.$$

$$\mathbf{318.} \quad y^2 = 2a(r - b). \quad \mathbf{319.} \quad x^2 + y^2 + b^2 = \frac{2x^2}{3a}.$$

$$\mathbf{320.} \quad x^2 + y^2 + b^2 = \frac{4}{3} x \sqrt{ax}. \quad \mathbf{321.} \quad (x^2 - y^2)^2 = x^4 \pm a^4.$$

$$\mathbf{322.} \quad x^4 = a^2(x^2 + y^2). \quad \mathbf{323.} \quad x^2 + y^2 = b^2 e^{\frac{x}{a}}. \quad \mathbf{324.} \quad x^2 = 2by - b^2.$$

$$\mathbf{325.} \quad y = a \log \frac{x^2 + y^2}{b^2}. \quad \mathbf{326.} \quad y^2 = (y + x^2) = a^2 e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2y - x}{x\sqrt{3}}}.$$

$$\mathbf{327.} \quad x^2 = 2by + b^2 + a^2. \quad \mathbf{328.} \quad (x - a)(y - b) = ab. \quad \mathbf{329.} \quad y = b \cos \frac{x}{a}.$$

$$\mathbf{330.} \quad x^3 y^3 = b^3 x^2 + a^2 y^2. \quad \mathbf{331.} \quad y^2 = by - ax. \quad \mathbf{332.} \quad y = b + \frac{ay^2}{2x^2}.$$

$$\mathbf{333.} \quad x = y \cot \log \frac{y}{a}. \quad \mathbf{334.} \quad \frac{y}{x} = b - \frac{x}{a}. \quad \mathbf{335.} \quad y = x \log \frac{a}{x}.$$

$$336. x + b = a \log \frac{x}{y}. \quad 337. x + b = 2a \sqrt{\frac{x}{y}}. \quad 338. \frac{x}{y} = \log \frac{x}{a}.$$

$$339. (x - b)(y - a) = ab. \quad 340. \frac{x}{y} = \log \frac{y}{a}. \quad 341. y^2 = 4ax.$$

$$342. y(2x) = a(y - x). \quad 343. y^2 = 4a(x - a). \quad 344. y^2 = 4a(x + a).$$

$$345. x = ae^{by}. \quad 346. bx = a^2 e^{y^2}. \quad 347. x^\lambda + y^\lambda = a^\lambda, \lambda = \frac{k}{h}.$$

$$348. xy = a^2. \quad 349. y = ae^{x^2}. \quad 350. x' + y' = a^2. \quad 351. y' - x' = a^2.$$

$$352. y^2 - x^2 = a^2.$$

$$353. xy = a^2. \quad 354. x^n y' = a^n x^m. \quad 355. y' + 16px = 0.$$

356—378. В этих задачах удобно выразить отрезки T, N, S_t, S_n и проч. через координаты x, y и угол α (см. ответы отд. III, к прим. 1—22), что даст или готовое выражение y через α , или конечное уравнение между x, y, α ; затем, на основании формулы $dx/dy = \cot \alpha$, можно или получить x в функции α или, продифференцировав конечное уравнение между x, y, α и исключив dx и α , получить дифф. уравнение для y , как функции α . В ответах α заменено на t .

$$356. x = a \left(\cos t + \lg \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \quad 357. x = x_0 + a (\lg \sin t - \sin^2 t) \\ y = a \sin t. \quad y = a \sin t \cos t.$$

$$358. x = x_0 + a (\lg \sin t - \sin^2 t) \\ y = a \sin t \cos t.$$

$$359. x = x_0 + a \left| \frac{\cos t}{2 \sin^2 t} + \lg \operatorname{tg} \left(\frac{t}{4} + \frac{t}{2} \right) + \frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| \\ y = a \left(\frac{1}{\sin t} + \frac{1}{\cos t} \right).$$

$$360. x = a (\sin t + \cos t) \\ y = y_0 + a (\sin t - \cos t - \lg \operatorname{tg} \left(\frac{t}{4} + \frac{t}{2} \right)).$$

$$361. x = x_0 + \frac{a}{3} (\sin^3 t), \quad (1 - 3 \sin^2 t), \quad 362. x = \frac{a}{\sin t}, \quad -\frac{1}{2} \cot^2 t \\ y = \frac{a \cos t}{\sqrt{\sin t}}. \quad y = a \cot t - e^{-\frac{1}{2} \cot^2 t}.$$

$$363. x = \frac{a}{\sin^2 t} \cdot t^{\frac{1}{2} \cot t}$$

$$y = a \cot t \cdot e^{-\frac{1}{2} \cot t}$$

$$364. x = x_0 + a \lg \left| \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)}{\operatorname{tg} t} \right|$$

$$y = a \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)$$

$$365. x = x_0 + \frac{a}{2} (2t - \sin 2t)$$

$$y = \frac{a}{2} (1 - \cos 2t)$$

$$366. x = x_0 + a \left(-\sin t + \frac{1}{2 \sin^2 t} \right)$$

$$y = a (\cot t + \cos t)$$

$$367. x = x_0 + a \left(\lg \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t - \sin t \right)$$

$$y = a (\sin t + \cos t)$$

$$368. x = a (1 - \sin t)$$

$$y = a \cos t$$

$$369. x = b \sin t - a (\cos t + t \sin t)$$

$$y = -b \cos t + a (\sin t - t \cos t)$$

$$370. x = a + b \sin t$$

$$y = a - b \cos t$$

$$371. x = \frac{a (\cos t - \sin t)}{1 - \sin t \cos t} e^{-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{-\cos t + 1}{\sqrt{3}} \right)}$$

$$y = x \cdot \frac{\cos t}{\cos t - \sin t}$$

$$372. x = \sqrt{\sin t} \frac{a}{\cos^2 t} \left(\frac{2 \sin t - 1 - \sqrt{5}}{2 \sin t - 1 - \sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$y = x \cos t$$

$$373. x = \frac{a}{\sin \frac{t}{2} \sqrt{\sin t}} e^{\frac{1}{4 \sin t}}$$

$$y = x \sin t$$

$$374. x = \frac{a}{1 - \sin t \cos t} e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} t - 1}{\sqrt{3}}}$$

$$y = x \sin^2 t$$

$$375. x = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t \cos t} y$$

$$y = a \sqrt{\frac{\cos 2t}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + t \right)}} e$$

$$376. x = a \sin t$$

$$y = a (1 - \cos t)$$

$$377. x = b \sin t$$

$$y = a - b \cos t$$

$$378. x = (a-b) \sin t - \frac{1}{2} a \sin^3 t.$$

$$y = b \cos t + \frac{1}{2} a \sin^2 t \cos t.$$

379 390. В этих задачах следует брать выражения отрезков N , T и проч. через r и угол μ (см. отв. отд. III к прим. 31—37), что дает выражение r через μ , после чего из формулы $dt = \frac{dr}{r} \operatorname{tg} \mu$ получается θ , как функция от μ (в ответах μ заменено на u).

$$379. r = a \sin (\theta - \theta_0). \quad 380. r^2 = a^2 \sin 2 (\theta - \theta_0). \quad 381. r = a \sin (\theta - \theta_0).$$

$$382. r = a \cos u, \quad 383. r = a \cos u, \quad 384. r = a \sin u \cos u.$$

$$\theta = \theta_0 + u - \operatorname{tg} u.$$

$$\theta = \theta_0 + u - \operatorname{tg} u.$$

$$\theta = \theta_0 + 2u - \operatorname{tg} u.$$

$$385. r = \frac{a \sin u \cos u}{\sin u + \cos u}$$

$$386. r = a \sqrt{\sin u \cos u}.$$

$$\theta = \theta_0 + u - \operatorname{tg} u + \lg (1 + \operatorname{tg} u).$$

$$\theta = \theta_0 + u - \frac{1}{2} \operatorname{tg} u.$$

$$387. r = a (\sin u + \cos u)$$

$$388. r = \frac{a}{\cos u}.$$

$$\theta = \theta_0 + u - \lg (1 + \operatorname{tg} u)$$

$$\theta = \theta_0 + \operatorname{tg} u - u.$$

$$389. r = a \sqrt{\cos u}.$$

$$390. r^2 = \frac{a^2}{\sin^2 (\theta - \theta_0)}.$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2} (u - \operatorname{tg} u).$$

391—411. В этих задачах нужно брать выражения радиуса кривизны: $R = \frac{dx}{\cos \alpha d\alpha} = \frac{dy}{\sin \alpha d\alpha}$, что даст непосредственно выражение x или y через α ; затем формула $dy = dx \cdot \operatorname{tg} \alpha$ определит другую координату через α .

$$391. x = a \sin^3 \alpha.$$

$$y = \frac{a}{3} (8 - 15 \cos \alpha + 10 \cos^3 \alpha - 3 \cos^5 \alpha).$$

$$392. x = \frac{1}{8} \sin \alpha - 2 \cos^3 \alpha - 8 \cos^5 \alpha + 15 \cos \alpha - 24, + \frac{15}{8} \alpha.$$

$$y = a (1 - \cos \alpha)^4.$$

$$393. x = a \sin^a \alpha.$$

$$y = a (2 - 3 \cos \alpha - \cos^3 \alpha).$$

$$394. x = x_0 + ak \int \frac{d\alpha}{\cos^k \alpha}$$

$$y = \frac{a}{\cos^k \alpha}.$$

$$395. x = a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$y = y_0 + \frac{a}{2} \log \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

$$396. x = a \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$y = y_0 + \frac{a}{2} \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{a}{2} \operatorname{lg} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$397. x = x_0 + \frac{a}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{2} \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$y = a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$398. x = a \sin \alpha$$

$$y = y_0 + a \cos \alpha$$

$$\text{или } x^2 + (y - y_0)^2 = a^2.$$

$$399. x = x_0 + a \operatorname{lg} \operatorname{tg} \alpha$$

$$y = a \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{или } y = be^{\frac{x}{a}}.$$

$$400. x = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

$$y = y_0 + \frac{a}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\text{или } x^2 = a (y - y_0).$$

$$401. x = x_0 + a \left(\cos \alpha + \operatorname{lg} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$y = a \sin \alpha.$$

$$402. x = x_0 + \frac{k}{4} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$y = y_0 + \frac{k}{4} (2\alpha - \sin 2\alpha).$$

$$403. x = x_0 - \frac{1}{2} k \cot^2 \alpha$$

$$y = y_0 - k \cot \alpha$$

$$\text{или } (y - y_0)^2 = -2k (x - x_0).$$

$$404. x = x_0 - k \cos \alpha$$

$$y = y_0 + k \left[\operatorname{lg} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \alpha \right]$$

$$405. x = x_0 + k\alpha$$

$$y = y_0 - k \operatorname{lg} \cos \alpha.$$

$$406. x = x_0 + k \lg \sin \alpha$$

$$y = y_0 + k\alpha.$$

$$407. x = x_0 + a \lg \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

$$y = a \cdot \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$408. x = x_0 + k (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$y = y_0 + k (-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha).$$

$$409. x = x_0 + k \cdot (2\alpha \cos \alpha + (\alpha^2 - 2)) \sin \alpha,$$

$$y = y_0 + k \cdot (2\alpha \sin \alpha + (\alpha^2 - 2)) \cos \alpha.$$

$$410. (x - x_0) \cdot (y - y_0) = -\frac{1}{2} k^2. \quad 411. (y - y_0)^2 - (x - x_0)^2 = k^2.$$

$$412 \quad 421 \quad \text{В этих задачах из данного уравнения } R = \frac{ds}{d\alpha} = f(s)$$

определяется s , как функция от α , после чего из формул $dx = ds \cdot \cos \alpha$, $dy = ds \cdot \sin \alpha$ находятся x и y , как функции от α .

$$412. x = x_0 + 2a (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$y = y_0 + 2a (-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha).$$

$$413. x = 3a (\alpha^3 \sin \alpha + 2\alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha) + x_0,$$

$$y = 3a (-\alpha^3 \cos \alpha + 2\alpha \sin \alpha + 2 \cos \alpha) + y_0.$$

$$414. x = a\alpha + x_0$$

$$y = a \lg \sec \alpha + y_0.$$

$$415. x = x_0 + \frac{a}{\sqrt{2}} \lg \left(\frac{1 + \sqrt{2} \sin \alpha}{1 - \sqrt{2} \sin \alpha} \right)$$

$$y = y_0 + \frac{a}{\sqrt{2}} \lg \left(\frac{\sqrt{2} \cos \alpha + 1}{\sqrt{2} \cos \alpha - 1} \right)$$

$$416. x = x_0 + a \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{или} \quad y - y_0 = 2a \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$y = y_0 + \frac{a}{\cos \alpha}.$$

$$417. x = x_0 + \frac{a}{4} (2\alpha + \sin 2\alpha), \quad 418. x = a (1 - \cos \alpha) + x_0,$$

$$y = y_0 + \frac{a}{4} (1 - \cos 2\alpha).$$

$$y = a \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \alpha + y_0.$$

$$419. \quad x = x_0 - \frac{a}{2} (e^{\alpha} \sin \alpha + \cos \alpha), \quad 420. \quad x = \frac{a}{2} (\operatorname{sh} \alpha \cos \alpha + \operatorname{ch} \alpha \sin \alpha + x_0) \\ y = y_0 + \frac{a}{2} (e^{\alpha} - \cos \alpha - \sin \alpha), \quad y = \frac{a}{2} (\operatorname{sh} \alpha \sin \alpha - \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha + y_0).$$

$$421. \quad x = x_0 - \frac{a}{3} \cos^3 \alpha$$

$$y = y_0 + \frac{a}{3} \sin^3 \alpha \quad \text{или} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{a}{3} \right)^2.$$

422. $r^{k-1} = a^{k-1} \sin(k-1)(\theta - \theta_0)$. (Данное уравнение приводится к более простому: $dx = k d\theta$, откуда легко получить $d\mu = (k-1)d\theta$, $\mu = (k-1)(\theta - \theta_0)$, и далее из формулы $\frac{dr}{r} = d\theta \cot \mu$ вывести r).

423. $r = \frac{a}{\cos \mu}$, $\theta = \operatorname{tg} \mu - \mu$. (Представить R в виде: $R = \frac{r dr}{d(r \sin \mu)}$, после чего легко определяется r через μ и затем вычисляется θ из формулы $d\theta = \frac{dr}{r} \operatorname{tg} \mu$).

424–434. В этих задачах удобно представить R в виде:

$$R = \frac{r}{\sin \mu} \cdot \frac{\frac{d\theta}{d\mu}}{1 - \frac{d\theta}{d\mu}}, \quad \text{после чего легко получается } \frac{d\theta}{d\mu} \text{ и затем } \theta \text{ через угол } \mu; \text{ наконец формула } \frac{dr}{r} = d\theta \cdot \cot \mu \text{ определяет } r \text{ через } \mu.$$

$$424. \quad r = \frac{a}{\cos \mu}$$

$$425. \quad r = a \operatorname{tg} \frac{\mu}{2}$$

$$\theta = \theta_0 + \operatorname{tg} \mu - \mu.$$

$$\theta = \theta_0 + \log \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2} \right).$$

$$426. \quad r = \frac{a}{1 - \cos \mu - \sin \mu} \cdot e^{\frac{1}{2}\mu}$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{1}{2} \lg(\cos \mu - \sin \mu) - \frac{1}{2} \mu.$$

$$427. \quad r = \frac{a}{\sin^{\frac{1}{2}} \mu \sqrt{\sin \mu}}$$

$$\theta = \theta_0 - \mu - \cot \frac{\mu}{2}.$$

$$428. r = \frac{a}{\sqrt{1 + \sin \mu \cos \mu}} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \left(\frac{2 \operatorname{tg} \mu - 1}{\sqrt{3}} \right)}, \quad 429. r = a \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}} \cdot e^{\frac{1}{4 \sin^2 \frac{\mu}{2}}},$$

$$\theta = \theta_0 + \mu + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \left(\frac{2 \operatorname{tg} \mu - 1}{\sqrt{3}} \right), \quad \theta = \theta_0 + \cot \frac{\mu}{2}.$$

$$430. r = a \cot \mu \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2} \right) \quad 431. r = a \cot \mu \quad 432. r = a e^{\mu}$$

$$\theta = \theta_0 - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2} \right), \quad \theta = \theta_0 - \operatorname{tg} \mu, \quad \theta = \theta_0 - \lg \cos \mu.$$

$$433. r = \frac{a}{\sin \mu} \sqrt{\sin \mu - \cos \mu} \cdot e^{-\frac{1}{2} \mu} \quad 434. r = \frac{a}{1 - \sin \mu}$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \log(\sin \mu - \cos \mu), \quad \theta = \theta_0 - \mu + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2} \right) \quad \text{или } r = a$$

435—453. В ответах буква b означает произвольный параметр.

$$435. y^2 - 2bx = b^2 (b > 0), \quad 436. \frac{x^2}{b} - \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1, \quad b < c.$$

$$437. 3x^2y - y^3 = b^3, \quad 438. \sin y = be^{-x}.$$

$$439. (x^2 + y^2)^3 = b^3 (3x^2y - y^3), \quad 440. 5x^4y - 10x^2y^3 - y^5 = b^5.$$

$$441. x^3y - xy^3 = b^4, \quad 442. (x^2 + y^2)^2 = b^2xy, \quad 443. 2x^2 + 3y^3 = b^2.$$

$$444. y^3 - 2bx \quad 445. \frac{1}{x^k} - \frac{1}{y^k} = \frac{1}{b^k}, \quad k > 2$$

$$446. x^3 + y^2 = 2bx, \quad 447. x^2 - y^2 = b^2, \quad 448. x^2y^2 = b^4.$$

$$449. r^k = b^k \cos k\theta, \quad 450. (x - x_0)^2 - y^2 = 2bx_0y.$$

$$451. y^3 + 2xy - x^2 = \pm b, \quad 452. y = b(x - y\sqrt{3}).$$

453. $r^k = b^k \sin(k\theta + \omega)$. (Не переходя к прямоугольным координатам, следует условие изогональности брать в виде $\mu, \mu + \omega$, где $\operatorname{tg} \mu = \frac{r d\theta}{dr}$).

454—471. Координаты эвольвенты x, y определяются по координатам эволюты x_0, y_0 следующими уравнениями $\frac{dy}{dx_0} = -\frac{dx}{dy} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$, которые, по исключении y , приводят к линейному уравнению для x , как функции от t .

$$454. \quad x = a(t + \sin t) + b \sin \frac{t}{2}.$$

$$y = a(3 + \cos t) + b \cos \frac{t}{2}.$$

$$455. \quad x = a \sin t - \frac{p}{2} \sin t \cdot \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right).$$

$$y = a \cos t - \frac{p}{2} \operatorname{tg} t + \frac{p}{2} \cot t \cdot \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right).$$

$$456. \quad x = b \cos t + \frac{1}{2} a \sin^2 t \cos t.$$

$$y = b \sin t - a \sin t \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 t \right).$$

$$457. \quad x = a \operatorname{ch} t + \frac{kb \operatorname{ch} t}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t}}.$$

$$y = b \operatorname{sh} t - \frac{ka \operatorname{sh} t}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t}}.$$

$$458. \quad x = t - b \operatorname{th} \frac{t}{a}.$$

$$y = a \operatorname{ch} \frac{t}{a} + \frac{b}{\operatorname{ch} \frac{t}{a}}.$$

$$459. \quad x = a \cos t + \frac{kb \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}.$$

$$y = b \sin t - \frac{ka \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}.$$

$$460. \quad x = -a \cos^3 t - b \sin t.$$

$$y = a \sin^3 t + b \cos t.$$

$$461. \quad x = \frac{1}{2} p \cot^2 t - k \sin t.$$

$$y = p \cot t + k \cos t.$$

$$462. \quad x = t + \frac{a^3 b}{\sqrt{a^4 - t^4}}.$$

$$y = \frac{a^2}{t} + \frac{bt^2}{\sqrt{a^4 - t^4}}.$$

$$463. \quad x = t - \frac{bt^2}{\sqrt{a^4 + t^4}}.$$

$$y = \frac{t^2}{3a^2} + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^4 + t^4}}.$$

$$464. \quad x = b \sin t + a(\cos t + t \sin t).$$

$$y = -b \cos t + a(\sin t - t \cos t).$$

$$465. \quad x = ae^{-t}(\cos t - \sin t) - b \sin t.$$

$$y = ae^{-t}(\cos t + \sin t) + b \cos t.$$

$$466. \quad x = a(2t \cos t - t^2 - 2) \sin t - b \sin t.$$

$$y = a(2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t) + b \cos t.$$

$$467. \quad x = 4a(t + \frac{1}{3}t^3, - \frac{bt}{1+t^2} \\ y = a(1+t^2 + \frac{b}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$468. \quad x = 2a \cos t - a \cos 2t - b \sin \frac{3}{2}t. \\ y = 2a \sin t - a \sin 2t + b \cos \frac{3}{2}t.$$

$$469. \quad x = a(3 \cos t - \cos 3t) - b \sin 2t. \\ y = a(3 \sin t - \sin 3t) + b \cos 2t.$$

$$470. \quad x = a \sqrt{\cos 2t} \cos t - b \sin 3t. \\ y = a \sqrt{\cos 2t} \sin t + b \cos 3t.$$

$$471. \quad x = a(1 + \cos t) \cos t - b \sin \frac{3}{2}t.$$

$$y = a(1 + \cos t) \sin t + b \cos \frac{3}{2}t. \quad 472. \quad (x' + y' + z' - h^2)y = 2ahx.$$

$$473. \quad 2x^2z' = 4phxy + (h^2 - x^2)(x' + y'). \quad 474. \quad h^2(y^2 - z^2) = a^2x^2.$$

$$475. \quad (3x - 2y - 3h)^2 + (x - 2z' - 2(h - 2g)(x - 2z) + h^2 - 4hg = 0.$$

$$476. \quad [h(x - b) + by]^2 + (b^2 - a^2, y^2 + h^2 - z - b)^2 + 2bhy(z - b) = 0.$$

$$477. \quad (x^2 + y^2 + z^2 - h^2 - 2a(x + y + z - h))^2 = \\ = (x^2 + y^2 + z^2 - h^2)(4a^2 + h^2 - x^2 - y^2 - z^2).$$

ОТДЕЛ VI.

Определенные интегралы.

$$1. \quad \frac{\pi^2}{4} \left(\text{Разбить на 2 интеграла с пределами } \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \right)$$

и положить во втором $y = \pi - x$).

$$2. \quad - \frac{\pi}{2} \log 2 \left(\text{Рассмотреть } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 \sin x \cos x dx \right)$$

и воспользоваться равенством $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx$).

3. $-\frac{1}{2} \log 2$ (Подстановка $x = y$ и пред. пример).
 4. $\frac{\pi}{2} \log 2$. (По частям и см. 2).
 5. $\frac{\pi}{2} \log 2$. (Подстановка $x = \sin y$ и прим. 4).
 6. $-\frac{\pi}{2} \log 2$. (По частям и прим. 5).
 7. $-\frac{\pi}{4} \left(\log 2 + \frac{1}{2} \right)$. (По частям и прим. 6).
 8. $\frac{\pi}{8} \log 2$. (Подстановка $x = \operatorname{tg} y$ и тождество $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \sin \left(\frac{\pi}{4} + y \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos y dy$).
 9. $\pi \log 2$. (Подстановка $x = \operatorname{tg} y$ и прим. 2).
 10. 0. $\left[\text{Разбить на 2 интеграла. } (0, 1) \text{ и } (1, \infty) \text{ и во втором положить } x = \frac{1}{y} \right]$.
 11. 0 при n четном, π при n нечетном (составить формулу приведения при помощи тождества: $\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} + 2 \cos(n-1)x$).
 12. 0 при n нечетном, π при n четном (приводится к предыдущему заменой $\sin nx \cos x$ полусуммой синусов).
 13. 0 при n нечетном, $\frac{\pi}{n}$ при n четном (по частям и прим. 12).
 14. $\log \frac{a}{b}$ (дифф. по b).
 15. $\frac{1}{2} \log \frac{b^2 + m^2}{a^2 + m^2}$ (дифф. по b).
 16. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{m(b-a)}{m^2 + ab}$ (дифф. по b).
 17. $\log \frac{(2a)^{2a} (2b)^{2b}}{(a+b)^{2(a+b)}}$ (дифф. по b).
 18. $\frac{\pi}{a} (e^{-ac} - e^{-ab})$ (дифф. по b привод.
- к инт. $\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}$).

19. $(b-a)\sqrt{\pi}$ (дифф. по пар. b). 20. — (дифф. по a).

21. $\arctg \frac{a(b-c)}{a^2+bc}$ (дифф. по b). 22. $\frac{1}{2} \log \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$ (дифф. по b).

23. $\frac{\pi}{4} (1+a) e^{-a} \left(\text{из интеграла } \int_0^\infty \frac{\cos ax \, dx}{b^2+x^2} \text{ дифф. по } b \right).$

24. $\frac{\pi}{16} (3+3a+a^2) e^{-a} \left(\text{из инт. } \int_0^\infty \frac{\cos ax \, dx}{b^2+x^2} \text{ двукратным дифф. по } b \right).$

25. $\frac{\pi}{2} \log(a + \sqrt{1+a^2})$ (дифф. по a).

26. $\frac{\pi}{2} \log \left(1 + \frac{a}{b} \right)$ (дифф. по a).

27. $\frac{\pi}{2} (1 - e^{-a})$ (дифф. по a и подст. $y = \operatorname{tg} x$).

28. $\frac{\pi}{2} \left[\arctg a \sqrt{2} - \arctg \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right]$ (дифф. по a и подстановки: $\operatorname{tg} x = \sin y$, $\operatorname{tg} y = z$).

29. $\pi \cdot \log \frac{a + \sqrt{1+a^2}}{2}$ (дифф. по a и прим. 6).

30. $\frac{\pi}{b} \log \left(1 + \frac{a}{b} \right)$ (дифф. по a). 31. $\pi \log \frac{1 + \sqrt{a^2+1}}{2}$ (дифф. по a).

32. $\frac{\pi}{2} \log(a + \sqrt{1+a^2})$ (дифф. по a). 33. $\pi \arcsin a$ (дифф. по a).

34. $\frac{\pi^2}{4} - \arccos^2 a$ (дифф. по a). 35. $\sqrt{\frac{\pi}{b}} (\sqrt{b} - \sqrt{a})$ (дифф. по b).

36. $\pi \log \frac{a+b}{2}$ (дифф. по b). 37. $\frac{\pi}{2} (b-a)$ (дифф. по b).

38. $\frac{\pi}{4}$ (заменить $\sin^2(ax)$ через кратные дуги).

39. $\frac{\pi a}{4}$ (дифф. по a или интегрированием по частям).

40. $\frac{5\pi}{32} a^2$ (дифф. по a или интегрир. по частям)

41. $\frac{\pi}{2}$ при $a > b + c$, $\frac{3\pi}{8}$ при $a = b + c$, $\frac{\pi}{4}$ при $b + c < a < b + c$,
 $\frac{\pi}{8}$ при $a = b - c$, 0 при $a < b - c$ (Выводится из $\int_0^x \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx$).
42. $\frac{b\pi}{2}$ при $a > b$, $\frac{a\pi}{2}$ при $a < b$. (Дифф. по b или a).
43. $\frac{\pi}{2} b$ при $a > b + c$; $\frac{\pi}{4} (a + b - c)$ при $b - c < a \leq b + c$; $\frac{\pi}{2} a$
 при $b > c$ и $a \leq b - c$, 0 при $b < c$ и $a \leq c - b$ (Приводится к 42
 или интегр. по частям).
44. $\frac{1}{2} \pi b c$ при $a > b + c$, $\frac{\pi}{8} (2ab - 2ac - 2bc - a^2 - b^2 - c^2)$
 при $a = b + c$. После интегр. по частям привод. к 43).
45. $\frac{3}{8} \pi a^2$ (Дифф. по a приводится к 42 или инт. по част.).
46. $\frac{1}{3} \pi a^3$ (Трижды интегрировать по частям).
47. $\frac{115}{384} \pi a^4$ (Четыре раза интегрировать по частям).
48. $\frac{1}{2} \left[\arctg \frac{b+c}{a} + \arctg \frac{b-c}{a} \right]$ (Дифф. по b).
49. $\frac{1}{4} \left[-\arctg \frac{a}{3b} - 3 \arctg \frac{a}{b} \right]$ (Дифф. по a и пр. 45).
50. $\frac{3}{8} b \log \frac{a^2 + 9b^2}{a^2 - b^2} + \frac{a}{4} \left[\arctg \frac{3b}{a} - 3 \arctg \frac{b}{a} \right]$ (Дифф. по b и пр. 22).
51. $b \arctg \frac{2b}{a} - \frac{a}{4} \log \frac{a^2 - 4b^2}{a^2}$ (Дифф. по a или по b).
52. $\frac{a}{4} \log \frac{a^2 + (b-c)^2}{a^2 - (b+c)^2} + \frac{b-c}{2} \arctg \frac{a}{b-c} - \frac{b+c}{2} \arctg \frac{a}{b+c} +$
 $+\frac{\pi c}{2}$ (Дифф. по a и пр. 42).
53. $\frac{\pi}{2} [ab - (a^2 - b^2) \log(a+b) - a^2 \log a - b^2 \log b]$. Дифф.
 по a и затем по b).

$$54. \frac{2}{3} [ab(a+b) - (a^3 - b^3) \log(a+b) + a^3 \lg a + b^3 \log b].$$

(Дифф. по a и затем по b).

55 - 76. Эти интегралы вычисляются при помощи следующих разложений в ряды:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{a \cos bx}{2a \cos bx + a^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nbx, \quad \frac{a \sin bx}{2a \cos bx + a^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nbx, \quad \frac{1-a^2}{2a \cos bx - a^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nbx, \quad |a| < 1. \end{aligned}$$

55. 0 при $|a| < 1$, $2\pi \log a$ при $|a| > 1$. (Сперва продифф. по a , затем приложить предыд. разложения).

56. $-\frac{1}{n} a^n$ при $|a| < 1$, $-\frac{1}{na^n}$ при $|a| > 1$. (Сперва дифф. по a , затем разложить в ряд).

57. $\frac{\pi}{1-a^2} \log \frac{1-a^2}{2}$ при $|a| < 1$; $\frac{\pi}{a^2-1} \log \frac{a^2-1}{2a^2}$ при $|a| > 1$ (См. 13).

58. 0.

59. $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^b - a}$ при $|a| < 1$, $\frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{ae^b - 1}$ при $|a| > 1$.

60. π при $|a| < 1$; 0 при $|a| > 1$.

61. $\frac{\pi^2}{2(1-a^2)}$ при $|a| < 1$, $\frac{\pi^2}{2(a^2-1)}$ при $|a| > 1$.

62. $\frac{4\pi^2}{a} \log(1-a)$ при $|a| < 1$, $\frac{4\pi^2}{a} \log\left(1-\frac{1}{a}\right)$ при $|a| > 1$.

63. $\frac{2\pi^2 a^m}{1-a^2}$ при $|a| < 1$, $\frac{2\pi^2}{a^m(a^2-1)}$ при $|a| > 1$.

64. $\frac{1}{2} a^{m-1}$ при $|a| < 1$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^{m+1}}$ при $|a| > 1$.

65. $\frac{1}{V1-a^2} \log \frac{V1-a^2}{1+V1-a^2}$. (Положив $a = \sin \alpha$, приводим

знаменатель к виду $1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2$, где $\lambda = \tan \frac{\alpha}{2}$, и прилагаем

формулы, данные выше 55 — 76, после чего восстанавливаем a по уравнению: $\lambda = \frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}}$.

$$66. \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \cdot \left(\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \right)^m \text{ (см. указ. к 65). } 67. 0 \text{ (см. 65).}$$

$$68. \frac{2\pi}{a} \log \left(1 + \frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \right) \text{ (см. 65). } 69. \pi \log \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2} \text{ (см. 65).}$$

$$70. \frac{\pi}{n} \cdot \left(\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \right)^n \text{ (см. 65). } 71. \frac{2\pi^2}{\sqrt{1 - a^2}} \text{ (см. 65).}$$

$$72. \frac{2\pi^3}{\sqrt{1 - a^2}} \left(\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \right)^m. 73. \frac{8\pi^3}{a} \log \left[1 - \frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \right].$$

$$74. \frac{\pi}{a} \cdot \left(\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \right)^m. 75. \frac{\pi}{e^b (1 + \sqrt{1 - a^2})} \cdot \frac{1}{a}.$$

$$76. \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{1 - \sqrt{1 - a^2}} = \frac{ae^{-b}}{ae^{-b}}.$$

77 — 115. Эти интегралы приводятся к функциям Эйлера B и Γ .

$$77. -\frac{\pi^2 \cos a\pi}{\sin^2 a\pi} \left(\text{из интегр. } \int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{1+x} \text{ выводится дифф. по } a \right).$$

$$78. \frac{\pi^4}{\sin^3(a\pi)} \cdot (1 + \cos^2(a\pi)) \text{ (Из 77 дифференцированием по } a \text{).}$$

$$79. -\frac{1}{m^2} \cdot \frac{\pi^2 \cos \lambda\pi}{\sin^2 \lambda\pi}, \lambda = \frac{k+1}{m}. \text{ (Подстановкой } x^m = y \text{ привод. к 77).}$$

$$80. b^{a-1} \cdot \frac{\pi}{\sin a\pi} \text{ (подстановка } x = by \text{).}$$

$$81. \frac{\pi b^{a-1}}{\sin a\pi} \left(\log b - \frac{\pi \cos a\pi}{\sin a\pi} \right) \text{ (из предыд. дифф — нем по } a \text{).}$$

$$82. \frac{\pi b^{a-2}}{\sin^2 a\pi} \left[(1 - (1-a) \log b) \sin a\pi + \pi (1-a) \cos a\pi \right] \text{ (Из 81 дифф. по } b \text{).}$$

$$83. -\frac{\pi}{m \sin \frac{\pi}{m}} \text{ (подстановка } x^m = y \text{).}$$

$$84. \frac{1}{n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)}{(p+1)(p+2) \dots (p+k)} \quad (\text{подст. } x^n = y).$$

$$85. \frac{1}{n} \cdot \frac{(1-p)(2-p) \dots (k-1-p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \cdot \frac{\pi p}{\sin \pi p} \quad (\text{подст. } x^n = y).$$

$$86. \frac{\pi}{\sin p\pi} \cdot 87. \frac{1}{a^{1-n} b^{1+n}} \cdot \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi}{2}} \quad \left(\text{подст. } \operatorname{tg} x = y, \frac{\operatorname{tg} y}{a} = z \right).$$

$$88. \frac{\pi}{2b \cos \frac{\pi a}{2b}} \left(\text{в инт. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} bx} dx \text{ подстановки: } e^x = y, y^{a/b} = z \right).$$

$$89. \frac{\pi^2}{4b^2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi a}{2b}}{\cos^2 \frac{\pi a}{2b}} \quad (\text{из 86 дифф — нием по } a).$$

$$90. \frac{1}{(1+a)^n} \cdot \frac{\pi}{\sin n\pi} \left(\text{Подстановки } 1 - x = y, y = \frac{z}{a+1} \right).$$

$$91. \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (\text{подст. } \operatorname{tg} x = y).$$

$$92. \frac{1}{a^{1-\lambda} b^\lambda} \cdot \frac{\pi}{m \sin \lambda\pi} \cdot \lambda \cdot \frac{k+1}{m} \quad (\text{подст. } x^m = y, \operatorname{tg} y = az).$$

$$93. \frac{1}{a^{1-\lambda} b^\lambda} \cdot \frac{\pi}{m \sin \lambda\pi} \cdot \frac{(1-\lambda)(2-\lambda) \dots (p-1-\lambda)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)} \\ (\text{подст. пр. 92}), \lambda = \frac{k+1}{m}.$$

$$94. \frac{3\pi \sqrt{2}}{128} \quad (\text{разбить на 2 инт., введя } x^6 = x^2(1+x^4) - x^2).$$

$$95. \frac{6\pi \sqrt{3}}{729} \quad (\text{разбить на 3 интеграла, введя } x^6 = (1+x^3)^2 - 2(1-x^3)+1).$$

$$96. \frac{1}{2\tilde{a}^m \tilde{b}^m} \cdot \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad \text{подстановки: } \operatorname{tg} x = y, y^2 = z.$$

$$97. \frac{2^{n-1}}{a^2 + b^2} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^2}{\Gamma(n)}.$$

$$\left(\text{Подстановка } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = y, y = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \cdot z \right).$$

$$98. \frac{1}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right) \Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k}{m}\right)}. \text{ (Подстановка } x^m = y).$$

$$99. \frac{1}{2} \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}. \text{ Подстановка } \sin x = y,$$

$$100. \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{k+1}{n}\right). \text{ (Подстановка } x^n = y).$$

$$101. \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\text{Выводится из } \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx \text{ интегрированием по } a \text{ от } 0 \text{ до } \infty \right).$$

$$102. \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\text{Выводятся из } \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos x dx \text{ интегрированием по } a \text{ от } 0 \text{ до } \infty \right).$$

$$103. \frac{1}{2} V \mp \cos\left(\frac{\pi}{4} - a^2\right). \text{ Из 101 и 102 подстановкой } x = y^2 \text{ на-} \\ \text{ходим } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos y^2 dy \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y^2 dy, \text{ после чего вводим } y = x + a.$$

$$104. \frac{1}{2} V \mp \sin\left(\frac{\pi}{4} - a^2\right). \text{ (См. указ. к 103).}$$

$$105. \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)} \left(\text{Из } \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx \text{ интегрированием по } a \text{ от } 0 \text{ до } \infty \right).$$

$$106. \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{2n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)} \left(\text{Из } \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos x dx \text{ интегрированием по } a \text{ от } 0 \text{ до } \infty \right).$$

$$107. \frac{1}{2} \log 2. \text{ (В интегр. делается замена } x \text{ на } 1-x, \text{ два инте-} \\ \text{грала складываются, и прилагается формула } \Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}).$$

$$108. a \log a - a + \frac{1}{2} \log 2. \text{ (Дифф. по } a \text{ и прим. 107.)}$$

$$109. \text{ (В интегралах с пределами } (-\infty, +\infty) \text{ положить } e^x = t, \\ t' = u)$$

$$110. \frac{1}{n^2 \sin \frac{m\pi}{n}} \text{ (подстановка } x^n = y).$$

$$111. \frac{1}{2^n} \operatorname{tg}^{\frac{p}{2}} \frac{x}{2} \text{ (подстановка } \sin x = y).$$

$$112. \frac{2}{n(n-2)} \cot^{\frac{1}{n}} \frac{x}{n} \text{ (подстановка } x^n = y).$$

$$113. \frac{2n}{(3n-2)(n^2-4)} \cot^{\frac{1}{n}} \frac{x}{n} \text{ (подстановка } x^n = y).$$

$$114. \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \frac{\mu\pi}{2}} \left(\text{Рассмотреть } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mu x} dx}{e^x + e^{-x}} \text{ и полож. } e^x = y \right)$$

$$115. \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \frac{\mu\pi}{2}} \frac{(\mu^2 + 1^2)(\mu^2 + 3^2) \dots (\mu^2 + 2n-1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2n} \text{ (Вводя в чи-}$$

слитель $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ и дважды интегрируя по частям, легко вывести формулу приведения для интегр. $J_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \mu x dx}{(\operatorname{ch} x)^k}$; $J_{k+2} = \frac{\mu^2 + k^2}{k(k+1)} J_k$, после чего, на осн 114, легко получается результат.

$$116. \text{ Подстановка } \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \cos \varphi = \frac{1}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \cos \varphi} \text{ дает} \\ d\varphi = \frac{-d\psi}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \cos \psi}$$

$$117. \text{ Разложить } \cos(x \cos \varphi) \text{ в ряд по степеням } x \cos \varphi \text{ и вос-} \\ \text{пользоваться значением интеграла } \int_0^\pi \cos^n \varphi d\varphi.$$

$$118. \frac{1}{a^2 + b^2} \text{ (Интегр. по параметру } x).$$

119. Левая часть уравнения приводится к

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \cos(x \cos \varphi) d\varphi - \int_0^{\pi} \sin(x \cos \varphi) \cdot \frac{\cos \varphi}{x} d\varphi$$

и после инт-ия первого члена по частям дает 0.

120. $aJ_0(b)J'_0(a) - bJ_0(a)J'_0(b)$. Составляется дифф. ур. для

функции $J_0(ax)$: $\frac{d^2}{dx^2} J_0(ax) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_0(ax) - a^2 J_0(ax) = 0$, аналогичное ур. для $J_0(bx)$, эти уравнения умножаются на $-J_0(bx)$, $+J_0(ax)$ и складываются, после чего находятся легко искомый интеграл помощью инт-ия по частям).

121. $\frac{1}{2} [J_0^2(a) + J_0'^2(a)]$. Выводится из 120 раскрытием неопределенности, принимая во внимание дифф. ур-ие 119 для функции $J_0(a)$

122. $\frac{J_0'(a)}{a}$. (Интегрировать по x от 0 до 1 дифф. ур-ие функции $J_0(ax)$, приведенное выше, см. 120.)

123. e^{-a} . (Назвав искомый интеграл через $\varphi(a)$, дважды дифференцируем по (a) , при чем каждый раз выполняем инт-ие по частям, и приходим принимая во вним. прим. 119 к дифф. уравнению $\varphi'(a) = \varphi(a)$; по условию $\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi'(0) = -1$ определяем $\varphi(a) = e^{-a}$).

124. $\frac{1}{2} (1 - \cos x)$. (Из 123 дифф-ием по a и инт-ием по частям).

125. Первый интеграл, после подстановки в уравнение, дает

$$\int_0^{\pi} \left[(k-1) \sin^2 \varphi T^{k-2} - \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sh} x} T^{k-1} \right] d\varphi = \left[\frac{\sin \varphi}{\operatorname{sh} x} T^{k-1} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = 0,$$

и второй дает:

$$\int_0^{\pi} \left[-(k-2) \sin^2 \varphi T^{k-3} - \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sh} x} T^{k-2} \right] d\varphi = \left[\frac{-\sin \varphi}{\operatorname{sh} x} T^{k-2} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = 0, \quad T = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \cos \varphi.$$

126. После подстановки интеграла в уравнение получается

$$\frac{3}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2 \varphi \cos n \varphi d \varphi}{(x - \cos \varphi)^{3/2}} - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos \varphi \cos n \varphi d \varphi}{(x - \cos \varphi)^{3/2}} + n^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos n \varphi d \varphi}{(x - \cos \varphi)^{3/2}},$$

и после двукратного инт-ия по частям в первом интеграле сумма приводится к 0.

127. Подстановка первого интеграла дает:

$$-\frac{3}{4} \int_0^{\infty} \frac{\text{sh}^2 \varphi \cos \mu \varphi d \varphi}{(\text{ch} \varphi - x)^{3/2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\text{ch} \varphi \cos \mu \varphi d \varphi}{(\text{ch} \varphi - x)^{3/2}} - \mu^2 \int_0^{\infty} \frac{\cos \mu \varphi d \varphi}{(\text{ch} \varphi - x)^{3/2}},$$

и, после двукратного интегрирования по частям первого интеграла, сумма приводится к 0.

128. $2 \sin \alpha$

129. $\frac{V^{-1}}{4} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}$

130. $\frac{1}{c} \arctg \frac{ab}{c\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}}$ 131. $\frac{2\pi}{a a_1 (a + a_1)^2}$ 132. $\frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$

133. Выразить поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, вырезаемую плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, при помощи координат u , v , полагая. $x = \sin u \cdot \sqrt{1 - a^2 \sin^2 v}$, $y = \cos u \cdot \cos v$.

ОТДЕЛ VII.

Ряды.

1—26. Эти ряды легко исследуются помощью признака сходимости: пред. $|u_n| \cdot n^\mu = A$ (кон. число, неравное 0) при $\mu > 1$.

1. Неабсолютно сходящийся.

2. Абсолютно сходящийся.

3. При $x^1 < 1$ — абсол. сходящийся, при $x = +1$ — неабс. сход.

4. При $pl - k > 1$ — абс. сход. 5. При $pl - k > 1$ — абс. сход.

6. При $pl - k > 1$ — абс. сход. 7. При $pl > 1$ — абс. сход.

8. При $(m - 1)p - k > 1$ — абс. сход. 9. При $pl - k > 1$ — абс. сход.

10. При $p > 2$ — абс. сход

11. Абсолютно сходящийся.

12. Расходящийся. 13. При $a = 0, b = \frac{2}{3} a_1$ абс. сход.
 14. При $a = b = 1$ — абс. сход. 15. При $a = 2$ — абс. сход.
 16. При $b = a$ абс. сход. 17. Абсолютно сходящийся.
 18. При $p > \frac{1}{3h}$ абс. сход. 19. При $p = \frac{1}{2}$ — абс. сход.
 20. Абсолютно сходящийся. 21. Абсолютно сходящийся.
 22. При $p > \frac{1}{2}$ — абс. сход. 23. При $p > \frac{1}{3}$ — абс. сх.
 24. Абсол. сход. 25. Абсол. сход. 26. Абсол. сход.

27 40. Эти ряды исследуются помощью признака сходимости Гаусса: пред. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| - 1 \right] = k > 1$.

27. При $|x| \leq 1$ — абс. сход. 28. При $p > \frac{1}{2}$ — абс. сход.
 29. При $a < p - 1$ — абс. сход. 30. При $p > \frac{1}{b-a}$ абс. сход.
 31. При $b < \frac{a}{a+1}$ абс. сход. 32. При $p > \frac{3}{2}$ — абс. сход.
 33. При $p = 2$ — абс. сход. 34. При $p = \frac{1}{a}$ — абс. сход.
 35. При $p = a$ — абс. сход. 36. При $q = 1 - \frac{p}{2}$ — абс. сход.
 37. При $q = 1 + \frac{p}{2}$ абс. сход. 38. Расходящийся.
 39. Расходящийся. 40. Расходящийся.

41--42. Данные дроби разлагаются на простейшие.

41. $u_n = \left[\frac{2}{21} \cdot \frac{1}{3^n} + \frac{9}{28} \cdot \frac{(-1)^n}{4^n} \right] x^n$, при $x = 3$ абс. сход.

42. $u_n = \left[(n+1)^2 + 1 \right] x^n$, при $x = 1$ — абс. сход.

43 47. Разложения определяются способом неопределенных коэффициентов, на основании теоремы умножения рядов.

$$43. 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \frac{31}{15120}x^6 + \dots + a_n x^{2n} + \dots,$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{3!} + \frac{a_{n-2}}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{a_0}{(2n+1)!} = 0,$$

при $|x| < \pi$ — абс. сход.

$$44. 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 + \dots + a_n x^{2n} + \dots,$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{3!} + \frac{a_{n-2}}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{a_0}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{2n!},$$

при $|x| < \frac{\pi}{2}$ — абс. сход.

$$45. 2 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{3024}x^6 + \dots + a_n x^{2n} + \dots,$$

$$\frac{a_n}{2!} + \frac{a_{n-1}}{4!} + \frac{a_{n-2}}{6!} + \dots + \frac{a_0}{2n!} = 0, \text{ при } |x| < 2 - \text{абс. сход.}$$

$$46. 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{19}{720}x^4 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} - \dots + (-1)^n \frac{a_0}{n+1} = 0, \text{ при } |x| < 1 \text{ абс. сход.}$$

$$47. 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \frac{1}{30240}x^6 - \dots + a_n x^n + \dots,$$

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3!} + \dots + \frac{a_0}{(n+1)!} = 0, \text{ при } |x| < 2 - \text{абс. сход.}$$

48–55. В этих задачах разлагается сначала производная функция, и полученный ряд интегрируется.

$$48. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{4n}}{4n+1} - \frac{x^{4n+1}}{4n+3} \right], \quad x \leq 1.$$

$$49. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{x^{4n+2}}{4n+3} \right], \quad x \leq 1.$$

$$50. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{2n+1}}{3n+1} - \frac{x^{2n+2}}{3n+2} \right], \quad x \leq 1.$$

$$51. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{6n+1}}{6n+1} + \frac{x^{6n+5}}{6n+5} \right], \quad x < 1$$

$$52. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{6n+1}}{6n+1} - \frac{x^{6n+5}}{6n+5} \right], \quad |x| < 1.$$

$$53. x - \frac{2}{3} x^3 + x^5 - \frac{13}{7} x^7 + \frac{34}{9} x^9 + \dots + a_{2n+1} x^{2n+1} + \dots, \\ (2n+1) a_{2n+1} + 3(2n+3) a_{2n+3} + (2n+5) a_{2n+5} = 0, \\ x < \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

$$54. \frac{x}{4} + \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{4} x^5 + \frac{1}{12} x^7 - \frac{1}{40} x^9 + \frac{1}{48} x^{11} + \dots + a_n x^n + \dots, \\ na_n + 2(n+1) a_{n+1} + 2(n+2) a_{n+2} = 0, \quad |x| < \sqrt[3]{2}.$$

$$55. -x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} x^6 - \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{8} x^8 + \\ \frac{2}{9} x^9 + \dots + a_n x^n + \dots, \quad na_n - (n+1) a_{n+1} + (n+2) a_{n+2} = 0, \\ |x| < 1.$$

56 69. Общий метод решения этих задач таков: назвав искомую сумму через $f(x)$, находим дифференциал ряда $f'(x)$ (в зад. 56 и 59 предварительно надо умножить ряд на x^d , в зад. 56 дифференцировать), откуда $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x) dx$.

$$56. \frac{1}{x^n} \left[e^x (x^2 - 2x + 2) - 2 \right], \quad x \text{ им. любое значение}$$

$$57. \frac{3}{2} x - \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x, \quad x < 1.$$

$$58. \frac{x^2}{2} \log(1+x) + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} x^2, \quad x < 1$$

$$59. \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{2x^n}, \quad x \text{ —люб. число. } 60. \frac{x}{1-x} + \log(1-x), \quad x < 1.$$

$$61. \frac{2x - x^2}{1-x} + 2 \log(1-x), \quad |x| < 1. \quad 62. \frac{1}{3} \log \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 1}, \quad -1 < x \leq 1.$$

$$63. \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2}, \quad |x| \leq 1.$$

$$64. (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x, \quad x - \text{любое число.}$$

$$65. \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}, \quad |x| \leq 1. \quad 66. \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}, \quad |x| \leq 1.$$

$$67. \frac{x^3}{6} \log \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{6} \log(1-x^2) + \frac{1}{6} x^2, \quad x < 1.$$

$$68. \arcsin x + \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \log(1+x^2), \quad x < 1.$$

$$69. \frac{16}{15} - \frac{2}{15} (8 + 4x + 3x^2) \sqrt{1-x}, \quad x < 1.$$

$$70. \frac{\alpha_0 \alpha + (\alpha_1 \alpha + \alpha_0 \beta) x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} \quad (\text{проверить разложение способом неопр.к-тов.})$$

Ряд сходящийся при $\alpha_1 < \text{наименьшего модуля корней уравнения } \alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0.$

$$71. \frac{1}{1-x-x^2}, \quad |x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (\text{частный случ. 70}).$$

$$72. a_0 + \int_0^x \frac{\alpha_1 \alpha + 2\alpha_2 \alpha + \alpha_1 \beta_1 x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} dx, \quad \text{границы сходимости, как 70.}$$

(Данный ряд продифф-ть, после чего приложить рез. 70).

$$73. 1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \left[\arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right], \quad x < 1 \quad (\text{частный случ. 72}).$$

$$74 \quad 80. \text{Эти суммы находятся заменю дробей } \frac{1}{n} \text{ интегралом } \int_0^1 x^{n-1} dx.$$

$$74. \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^4} dx = \frac{2}{3} \log 2. \quad 75. \int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x^4} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(1+\sqrt{2}).$$

$$76. \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2.$$

$$77. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\log(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} \right].$$

$$78. \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$79. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \log(2+\sqrt{3}). \quad 80. \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx = \frac{\pi}{3}.$$

81–90. В этих рядах нужно каждый член разложить на простейшие дроби.

$$81. \frac{1}{4} \quad 82. \frac{-2}{4} \quad 83. \frac{2}{3} \log 2 \text{ (см. 74). } 84. \frac{1}{2\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2}) \text{ (см. 75).}$$

$$85. \frac{-1}{4} - \frac{1}{2} \log 2 - 1 \text{ (см. 76). } 86. \frac{1}{8\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2}) + \frac{-\sqrt{2}}{32} \text{ (см. 77).}$$

$$87. \frac{-\sqrt{2}}{16} \text{ (см. 78). } 88. \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{2} \text{ (см. 78). } 89. \frac{\pi}{36} + \frac{1}{12\sqrt{3}} \log(2 + \sqrt{3})$$

$$\text{(см. 79). } 90. \frac{\pi - 3}{6} \text{ (см. 80). } 91. \text{Ряд приводится к виду:}$$

$$\frac{1}{\Gamma(k)} {}^1C_0 B(1, k) + C_1 B(a+1, k) + \dots + C_n B(na+1, k) + \dots, \text{ после}$$

$$\text{чего функция } B(1, k) \text{ заменяется интегралом } \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{k-1} dt,$$

и результат получается непосредственно.

$$92. \log 2. \quad 93. \frac{-\pi}{3\sqrt{3}}. \quad 94. \frac{1}{4} \log 2 + \frac{\pi}{8}. \quad 95. 2 \log 2 - 1.$$

$$96. \frac{-\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2. \quad 97. \frac{2}{3} \log 2. \quad 98. \frac{1}{2\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2}) - \frac{\pi}{8} (\sqrt{2} - 1).$$

$$99. \frac{1}{4}. \quad 100. \log 2 - \frac{1}{2}. \quad 101. \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4} \log 3. \quad 102. \frac{1}{4} \log 2.$$

$$103. 2 \log 2 - \frac{5}{4}. \quad 104. \frac{1}{2} (1 - \log 2). \quad 105. \frac{2}{3} \log 2 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

$$106. \frac{\pi}{8} (\sqrt{2} - 1). \quad 107. \frac{5}{12} + \frac{2}{3} \log 2. \quad 108. \frac{5-\pi}{12} - \frac{1}{6} \log 2.$$

$$109. \int_0^1 (1-t) \log(1+t^2) dt = \frac{-3}{2}. \quad 110. \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 \log(1+t^2) dt =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{\pi}{2} - \log 2 - \frac{5}{6} \right]. \quad 111. \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 \operatorname{arctg}(t^2) dt = \frac{1}{4} \log 2 +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{3} \log(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{12} - \frac{\pi}{24} (2\sqrt{2} - 1). \quad 112. \int_0^1 \frac{(1-t) dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \log(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1). \quad 113. \int_0^1 \frac{(1-t) dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$114. \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-t)^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} = 1 - \frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4} \log(1 + \sqrt{2}).$$

$$115. \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-t)^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{3}{8} - 1. \quad 116. \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 \log \left(\frac{1}{1-t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{17}{18} - \frac{4}{3} \log 2. \quad 117. \int_1^2 \frac{t^2 (1-t)^2}{2+t} dt = 36 \log \frac{3}{2} - \frac{175}{12}.$$

$$118. \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{t(1-t)^2}{3+t} dt = \frac{3}{2} \left[\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} - \log \frac{4}{3} \right].$$

$$119. \text{ Следует из формулы } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$120. \text{ Следует из формулы } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \varphi d\varphi = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}.$$

$$121. \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + \sin^2 \varphi) d\varphi = 2 \log \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right).$$

$$122. \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(\sin \varphi)}{\sin \varphi} d\varphi = \log(1 + \sqrt{2}). \quad 123. \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 + \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$124. \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d\varphi}{2 + \sin^2 \varphi} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad 125. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi d\varphi}{1 + \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2}).$$

$$126. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin \varphi d\varphi}{2 + \sin^2 \varphi} = \frac{1}{3} \log(2 + \sqrt{3}). \quad 127. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin \varphi d\varphi}{2 - \sin^2 \varphi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$128. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin \varphi d\varphi}{3 + \sin^2 \varphi} = \frac{3}{4} \log 3. \quad 129. \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{1}{1 - \cos \varphi} \right) d\varphi = \log 2.$$

$$130. \int_0^{\pi} \frac{4 \sin \varphi d\varphi}{4 - \sin^2 \varphi} = \frac{2\pi}{3}. \quad 131. \int_0^{\pi} \frac{a d\varphi}{a - \sin^2 \varphi} = \pi \sqrt{\frac{a}{1+a}}.$$

$$132. \int_0^{\pi} \frac{a dx}{a - \sin^2 x} = \pi \sqrt{\frac{a}{a-1}}.$$

$$133. \int_0^{\pi} \frac{a \sin x}{a + \sin^2 x} dx = \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \log \frac{1+\sqrt{1+a}+1}{1+\sqrt{1+a}-1}.$$

$$134. \int_0^{\pi} \frac{a \sin x dx}{a - \sin^2 x} = \frac{a}{\sqrt{a-1}} \arctg \frac{1}{\sqrt{a-1}}. \quad 135. \text{ Вывод основан на}$$

$$\text{формуле } \frac{1}{n^2} = \int_0^1 x^{n-1} \log x dx. \quad 136. - \int_0^1 \frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

$$137. - \int_0^1 \frac{\log x dx}{\sqrt{1-x}} = 4(1 - \log 2).$$

$$138. - \int_0^1 \frac{\log x dx}{\sqrt{1+x}} = 4(\sqrt{2}-1) - 4 \log \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

$$139. - \int_0^1 \frac{x^3 \log x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4} \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$140. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{c} = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < c \\ 0 & \text{при } x=0, \pm c \\ -1 & \text{при } -c < x < 0. \end{cases}$$

$$141. \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{c} = \begin{cases} 0 & \text{при } -c < x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{при } x=0, +c \\ 1 & \text{при } 0 < x < c. \end{cases}$$

$$142. \frac{c}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{2k\pi x}{c} = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < c \\ \frac{1}{2}c & \text{при } x=0, c. \end{cases}$$

$$143. \frac{2c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{c} = \begin{cases} x & \text{при } -c < x < c \\ 0 & \text{при } x = \pm c. \end{cases}$$

$$144. \frac{c}{2} - \frac{4c}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{c} = \begin{cases} x^2 & \text{при } -c < x < c \\ 0 & \text{при } x = \pm c. \end{cases}$$

$$145. \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin kx}{k} = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x < 0 \\ x & \text{при } 0 < x < \pi \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } x = \pm\pi. \end{cases}$$

$$146. \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < \pi \\ \pi & \text{при } \pi < x < 2\pi \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } x = 0, 2\pi. \end{cases}$$

$$147. \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(4k+2)x}{2k+1} = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -x & \text{при } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

$$148. \frac{\pi}{4} (a-b) - \frac{2}{\pi} (a-b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \\ + (a+b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin kx}{k} = \begin{cases} bx & \text{при } -\pi < x < 0 \\ ax & \text{при } 0 < x < \pi \\ \frac{a-b}{2} & \text{при } x = \pm\pi. \end{cases}$$

$$149. \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos kx}{k^2} = \begin{cases} x^2 & \text{при } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{при } x = \pm\pi. \end{cases}$$

$$150. \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 < x < 2\pi \\ 2\pi^2 & \text{при } x = 0, 2\pi. \end{cases}$$

$$151. \frac{\pi^2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{k} = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2}\pi^2 & \text{при } x = 0, \pi. \end{cases}$$

$$152. 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin kx}{k} - 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)} = \begin{cases} x & \text{при } -\pi < x < 0 \\ -x^2 & \text{при } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{при } x = \pm\pi. \end{cases}$$

$$153. \frac{-2}{6} - 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos kx}{k^3} + \pi \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin kx}{k} - \\ - \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{при } 0 \leq x < \pi \\ \frac{1}{2} \pi^2 & \text{при } x = \pm \pi \end{cases}$$

$$154. \frac{2}{3} c^3 + \frac{4c^3}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3} \cos \frac{k\pi x}{c} = c^3 - x^3 \text{ при } -c < x \leq +c.$$

$$155. \frac{12c^3}{\pi^3} \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin \frac{k\pi x}{c}}{k^3} = x(c^2 - x^2) \text{ при } -c \leq x \leq +c.$$

$$156. \frac{8}{15} c^4 + \frac{48c^4}{\pi^4} \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos \frac{k\pi x}{c}}{k^4} = (c^2 - x^2)^2 \text{ при } -c \leq x \leq +c.$$

$$157. \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} = \sin x \text{ при } 0 \leq x \leq \pi.$$

$$158. \frac{8}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k}{4k^2 - 1} \sin 2kx = \begin{cases} \sin x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{при } x = \pm \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$159. \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} \cos 2kx = \cos x \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$160. \frac{8}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin 2kx = \begin{cases} \cos x & \text{при } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{при } x = 0, \pi. \end{cases}$$

$$161. 1 - \frac{1}{2} \cos x - 2 \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - 1} \cos kx = x \sin x \text{ при } -\pi < x < +\pi.$$

$$162. -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 - 1} \sin kx = \begin{cases} x \cos x & \text{при } -\pi < x < +\pi \\ 0 & \text{при } x = \pm \pi. \end{cases}$$

$$163. -\log 2 - \sum_1^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = \lg \sin \frac{x}{2} \text{ при } 0 < x < 2\pi.$$

$$164. \frac{2 \sin \mu \pi}{\pi} \cdot \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{k}{k^2 - \mu^2} \sin kx = \begin{cases} \sin \mu x & \text{при } -\pi < x < +\pi \\ 0 & \text{при } x = \pm \pi. \end{cases}$$

$$165. \frac{\sin \mu \pi}{\mu \pi} + \frac{2\mu \sin \mu \pi}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k^2 - \mu^2} \cos kx = \cos \mu x$$

при $-\pi \leq x \leq +\pi$.

$$166. \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{k^2 + 1} \sin kx = \begin{cases} \operatorname{sh} x & \text{при } -\pi < x < +\pi \\ 0 & \text{при } x = \pm \pi. \end{cases}$$

$$167. \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} + \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 1} \cos kx = \operatorname{ch} x \quad \text{при } -\pi \leq x \leq +\pi.$$

$$168. \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} - \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 + 1} \cos kx +$$

$$+ \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k}{k^2 + 1} \sin kx = \begin{cases} e^x & \text{при } -\pi < x < +\pi \\ \operatorname{ch} \pi & \text{при } x = \pm \pi. \end{cases}$$

$$169. S_3 = \frac{1}{4} n^4 - \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2, S_4 = \frac{1}{5} n^5 - \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n,$$

$$S_5 = \frac{1}{6} n^6 - \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^3,$$

$$S_6 = \frac{1}{7} n^7 - \frac{1}{2} n^6 + \frac{1}{2} n^5 - \frac{1}{6} n^4 + \frac{1}{42} n,$$

$$S_7 = \frac{1}{8} n^8 - \frac{1}{2} n^7 + \frac{7}{12} n^6 - \frac{7}{24} n^5 + \frac{1}{12} n^4,$$

$$S_8 = \frac{1}{9} n^9 - \frac{1}{2} n^8 + \frac{2}{3} n^7 - \frac{7}{15} n^6 + \frac{2}{9} n^5 - \frac{1}{30} n,$$

$$S_9 = \frac{1}{10} n^{10} - \frac{1}{2} n^9 + \frac{3}{4} n^8 - \frac{7}{10} n^7 + \frac{1}{2} n^6 - \frac{3}{20} n^5.$$

(Эти результаты получаются удобнее всего по формуле Эйлера-Маклорена).

$$\begin{aligned}
 170. \quad T_2 &= 2n^2 - n, \quad T_3 = 4n^3 - 3n^2, \quad T_4 = 8n^4 - 8n^3 + n, \\
 T_5 &= 16n^5 - 20n^4 - 5n^3, \quad T_6 = 32n^6 - 48n^5 + 20n^4 - 3n^3, \\
 T_7 &= 64n^7 - 112n^6 + 70n^5 - 21n^4, \quad T_8 = 128n^8 - 256n^7 + 224n^6 - \\
 &112n^5 + 17n^4, \quad T_9 = 256n^9 - 576n^8 + 672n^7 - 504n^6 + 153n^5.
 \end{aligned}$$

(Получаются из формулы $T_k = 1^k + 2^k + \dots$

$$+ (2n-1)^k - 2^{k-1} \left[1^k + 2^k + (n-1)^k \right]).$$

$$171. \quad 2n^2 - 3n + 1.$$

$$172. \quad \frac{8}{3}n^3 - 2n^2 - \frac{5}{3}n + 1.$$

$$173. \quad \frac{(n-k-1)(n-k+2) \dots (n-n+1)}{k+1}.$$

$$174. \quad \frac{1}{4}, \quad 175. \quad \frac{11}{18}.$$

$$176. \quad \frac{19}{36}$$

$$177. \quad \frac{17}{180}$$

$$178. \quad \frac{1217}{26880}$$

$$179. \quad \frac{5}{36}.$$

$$180. \quad \frac{1}{1440}$$

$$181. \quad \frac{517}{1080}$$

$$182. \quad \frac{7}{96}.$$

$$\begin{aligned}
 183. \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cdot 5^4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{2}{12} - \frac{5}{5} + \dots - \frac{2^8}{720} \cdot \frac{210}{5^8} = \\
 = 1,00453.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 184. \quad \log 10 = \frac{1}{2} [0,01 \dots 0,1] - \frac{1}{12} \left[-\frac{1}{10^4} - \frac{1}{10^2} \right] - \\
 - \frac{5}{120} \left[-\frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^4} \right] = 2,348410.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 185. \quad \frac{1}{3} \log 4 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{400} - \frac{1}{100} \right] + \frac{3}{12} \left[\frac{-1}{400^3} + \frac{1}{100^3} \right] - \\
 - \frac{5 \cdot 27}{720} \left[\frac{-6}{400^4} + \frac{6}{100^4} \right] = 0,46587156
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 186. \quad 2 \left[\frac{1}{10^4} - \frac{1}{10^2} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{10^6} - \frac{1}{10^4} \right] - \frac{1}{24} \left[\frac{-1}{10^8} + \frac{1}{10^6} \right] + \\
 + \frac{5}{720} - \frac{15}{8} \left[\frac{1}{10^4} - \frac{1}{10^2} \right] = 180,045041625.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 187. \quad \log \left(\frac{\lg 1000}{\lg 500} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1000 \lg 1000} - \frac{1}{500 \lg 500} \right] + \\
 + \frac{5}{12} \cdot \frac{1 + \frac{1}{10^5}}{10^4 \lg 100} = 0,10751.
 \end{aligned}$$

СОДЕРЖАНИЕ.

I ч. Задачи (2265).

	Стран.
I. Высшая Алгебра (104 зад.)	1—5
II Интегрирование функций (330 зад.)	5—16
III. Геом. Прилож. Дифф. Исчисления (+56 зад.)	17—40
IV. Геом. Прил. Интегр. Исчисления (578 зад.)	40—72
V. Интегрир. дифф. уравнений (477 зад.)	72—88
VI. Определенные интегралы (183 зад.)	88—96
VII. Ряды (187 зад.)	97—108

II ч. Ответы.

I. Высшая Алгебра	109—114
II. Интегрир. функций	114—137
III Геом. Прил. Дифф. Исчисления	138—168
IV. Геом. Прил. Инт Исчисления	169—189
V. Интегрирование дифф. уравнений	189—213
VI. Определенные интегралы	213—223
VII. Ряды	223—234

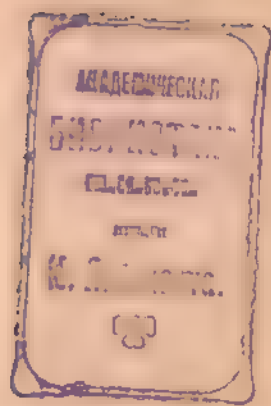
О П Е Ч А Т К И.

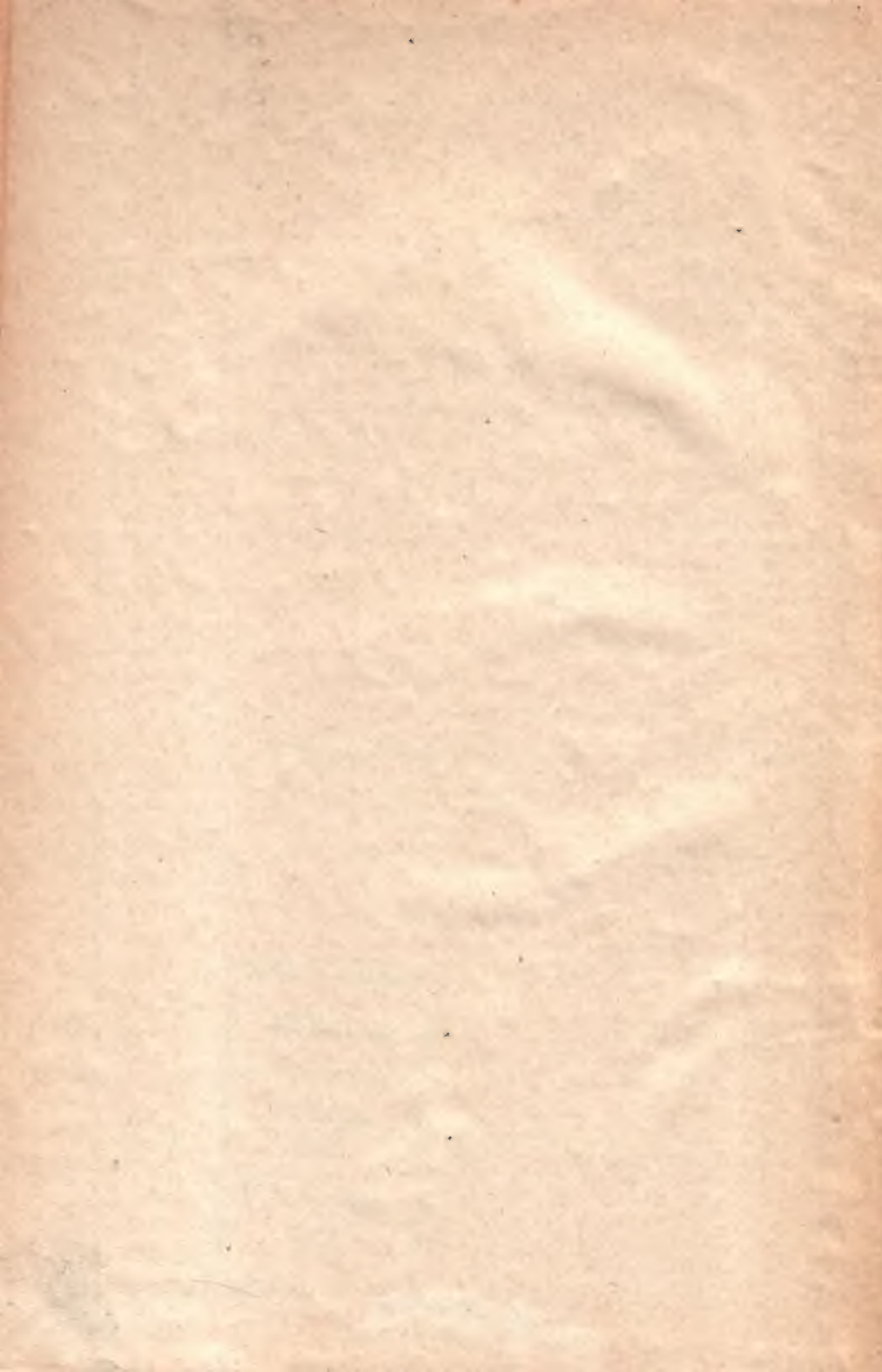
Стран	Задача №.	Строка.	Напечатано:	Должно быть:
8	102			$\int \frac{x(8x^2 + 2a^2)}{\sqrt{x^3 + a^3}} dx$
15	320	9 св.	$\left[\frac{y}{2\sqrt{1+xy}} \right]$	$\left[\frac{x}{2\sqrt{1+xy}} \right]$
20	41	4 см.	$x_0 + \frac{1}{2} \left[\right]$	$x_0 + \frac{a}{4} \left[\right]$
24	114	3 см.	$a =$	$x =$
25	116	1 см.		$x = \frac{a}{2} \left[e^t (\sin t + \cos t) - 1 \right]$
25	116	2 св.		$y = \frac{a}{2} \left[e^t (\sin t - \cos t) + 1 \right]$
39	432		$\frac{z}{1+zt}$	$\frac{z}{l+zt}$
43	43	3 см.	$z = tht$	$z = atht$
45	101		$y^3 + y^3 =$	$x^3 + y^3 =$
46	127		$= qe$	$= a \cdot e$
46	127		$\int_0^x 2ax - a^2$	$\int_0^x 2ax - x^2$
54	285	9 св.	$= 0,3 \frac{x}{a}$	$= 0,3 \frac{x}{l}$
56	347	10 см.	$x y$	$\left. \right), x y$
58	351	2 см.	$= \frac{x^3}{a}$	$= \frac{x^2}{d}$
61	394		$2px$	$2px = x^2$
64	395		$r = 2pr$	$y^2 = 2q \cdot x$

Стран.	Задача №.	Строки.	Напечатано:	Должно быть
65	481		$-\frac{z}{k^2}$	$-\frac{z^2}{k^2}$
65	482		$=\frac{z}{1}$	$=\frac{z}{l}$
67	506		1'	h
67	508		$\frac{z}{1}$	$\frac{z}{l}$
75	98		$(a^2 +$	$(\frac{a^2}{u} +$
75	126		$2y' \cdot \frac{1}{2}$	$2y' \cdot \frac{1}{2}$
76	167		y'''	$y''y'''$
78	226		$xa +$	$xa^x +$
80	264	6 св.	$(2t - 1)$	$(2t - 1)$
84	376		$+ x$	$= x$
85		6 св.	касательный	касательной
89	22		$\cos dr -$	$\cos bx -$
90	39		r	$\frac{x^2}{x^2}$
90	44		$\cos ex$	$\sin ex$
90	47		$\sin ax$	$\sin^2 ax$
91	56		bx	dx
92	82		$(x + b^2)$	$(x + b)^2$
95	116 (ДВАЖДЫ)		$+ chx \cos \varphi$	$+ shx \cos \varphi$
96	125		$+ chx \cos \varphi$	$+ shx \cos \varphi$
97	4, 5, 6.		n	n^i
97	9		$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{l}$
99	64		$-\frac{5 \cdot 6}{7}$	$+\frac{5 \cdot 6}{7'}$
104	129		$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2n}$
107	168		про	при
107	174		$\frac{1}{1 \cdot 2}$	$\frac{1}{1 \cdot 3}$
110	10		$- 1$,
115	13		$-\frac{1}{4 \sqrt{3}}$	$+\frac{3}{4 \sqrt{3}}$
117	55		$\frac{2}{3 \sqrt{2}}$	$\frac{2}{3 \sqrt{3}}$
123	125		x^{-3}	x^{-2}

Стран	Задача №.	Строка.	Напечатано	Должно быть.
125	146		1	- 1
126	157		134	135
127	174		$\sqrt{3x} (\quad)$	$\sqrt{3x} (\quad)$
137	325	8 см	+ 2	+ x
140	72			$= (aX)^{\lambda} + (bY)^{\lambda}, \lambda = \frac{n}{n-1}$
156	317	11 см.	$\frac{1}{x}$	+
168	455			$R_7 = -(x + y).$

77





2000

